

DE MORGAN'S

ELEMENTS OF ARITHMETIC.

Translated into the Marathi Language,

BY

COLONEL GEORGE RITSO JERVIS,

CHIEF ENGINEER BOMBAY PRESIDENCY,

ASSISTED BY

VISHNOO SOONDER CHUTRY,
GUNGADHUR SHASTRI PHUDKAY, AND
GOVIND GUNGADHUR PHUDKAY.



BOMBAY:

AMERICAN MISSION PRESS,

T. GRAHAM, PRINTER.

1850



डमार्गन

याचा

अंकगणिताचा मूळ पीठिका;

यांचें मराठी भाषांतर

कारनेल जार्जरिट्सो जर्विस साहेब,

मुंबई खात्याचे चीफ इंजनेर

यांणीं

विष्णु सुंदर छत्रे, गंगाधर शास्त्री फडके

आणि

गोविंद गंगाधर फडके

यांचा सहाय्यानें केलें.



मुकाम मुंबई. माहे फेब्रुवारी सन् १८५०.

मुंबईमध्यें अमेरिकन मिशन छापखान्यांत छापिलें, सन् १८५०.



अनुक्रमणिका.

पहिलें पुस्तक.

भाग.		पृष्ठ.
पहिला.	अंकसंख्यालेखनवाचन	१
दुसरा.	मिळवणी आणि वजाबाकी	१७
तिसरा.	गुणाकार	२९
चवथा.	भागाकार	४१
पांचवा.	अपूर्णांक	६४
सहावा.	दशांश अपूर्णांक	७९
सातवा.	वर्गमूळ	१०८
आठवा.	प्रमाण	१२२
नववा.	संयोग आणि व्युत्क्रम संयोग	१४३

दुसरें पुस्तक.

पहिला.	वजनें मापें इत्यादि	१५०
दुसरा.	त्रैराशिक	१८६
तिसरा.	व्याज इत्यादि	१९४

पुरवणी.

पहिला.	गणन करण्याची रीति	२०७
दुसरा.	नऊ आणि अकरा टाकून ताळा पहाण्याची रीति	२१३
तिसरा.	अंकसंख्या लेखनवाचन क्रम रीति	२१६



भाग.

चवथा. अपूर्णांकांचें व्याख्यान · · · · · · · · · · · · · · · · [illegible]
पांचवा. गुणदर्शकांची रीति · · · · · · · · · · · · · · · · २२४
सहावा. पैक्याचे दशांशरूप हिशोबाची रीति · · · · · · · · २२६
सातवा. वहिवाटवहिचा रितीचीं मूळ कारणें · · · · · · · · २२९
आठवा. अपूर्णांकांचे किमतीचे जवळ जवळ दुसरे अपूर्णांक काढण्याची रीति · · · · · · · · · · २४०
नववा. अंकांचे साधारण गुणांविषयीं · · · · · · · · · · · · २४४
दहावा. संयोगांविषयीं · · · · · · · · · · · · · · · · · · २५६
अकरावा. समीकरणें उलगडण्याची होर्नर साहेबाची रीति · · २६७
बारावा. भूमितीला अंकगणित लावण्याचा रिती · · · · · · · २७७

TO

THE HONORABLE SIR GEORGE RUSSELL CLERK, K. C. B.

GOVERNOR OF BOMBAY.

One of the most eminent of those Statesmen who have laboured in many ways, and with conspicuous success, for the mental and moral improvement of the Natives of Hindoostan; and who considers that the introduction into India of European knowledge and modern science, by translation from the languages of Europe into the languages of the East, is the true basis on which the Education of the mass of the Native population should be founded; this translation into Marathi of Professor De Morgan's pre-eminently lucid treatise on the Elements of Arithmetic is, with sentiments of unfeigned admiration and regard, dedicated, by his most obedient humble servant,

GEORGE RITSO JERVIS.

Bombay, August 1850.

"Ce n'est point par la routine qu'on s'instruit, c'est par sa propre reflexion; et il est essentiel de contracter l'habitude de se rendre raisón de ce qu'on fait: cette habitude s'acquiert plus facilement qu'on ne pense; et une fois acquise, elle ne se perd plus."—CONDILLAC.

ज्ञानप्राप्ति स्वकष्टानें आणि स्वविचारानें होती. दुसऱ्याचे सांगण्यावरून केवळ पाठ करणें, हा ज्ञानप्राप्तीचा उपाय नव्हे. जें कांहीं करायाचें, त्याचें कारण सांगण्यांची अवश्य संवय केली पाहिजे. अशी संवय करण्यास, जरी पहिल्यानें अवघड वाटतें, तथापि ती अभ्यासानें सोपी होती. आणि एकदां संवय झाली, ह्मणजे, ती कधीं सुटत नाहीं.



मूळ पीठिका.

पहिलें पुस्तक.

अंकगणिताचा मूळ पीठिका.

पहिला भाग.

अंकसंख्या लेखन वाचन यांविषयीं.

१. कांहींएक जातीचे वस्तूंचा समुदाय एकत्र झालेला आहे असी कल्पना कर; ह्मणजे जसी, एक स्वारांची टोळी. ती पाहिल्यानंतर पाहणारास जरी मोजायाची संवय नसली, तरी त्या टोळींत प्रत्येक मनुष्यास एक एक घोडा आहे असें त्यास पहिल्याने वाटेल. आतां मनुष्यें आणि घोडे हे दोन्ही जरी भिन्न भिन्न जातीचे आहेत, तरी पहिल्ये जातीचे एकास दुसऱ्ये जातीचा एक आहे, ह्मणजे, प्रत्येक घोड्यावर एक एक मनुष्य आहे, यास्तव पाहणाराचा मनांत एक नवी कल्पना उत्पन्न होईल, ती शब्दांनीं याप्रमाणें बोलतां येईल, ह्मणजे, मनुष्यांची आणि घोड्यांची **संख्या** सारिखीच आहे. जेव्हां रानटी मनुष्यास मोजण्याची कांहींएक रीति माहित नव्हती, तेव्हां प्रत्येक मनुष्याबदल एक एक खडा घेऊन, वरची अंकसंख्या स्मरणांत ठेवीत असेल. अशा तऱ्हेचा रानटी रीतीपासून, उत्पन्न झालेले पुढील कलमांत जे क्रम सांगितले आहेत, त्यांचा योगाने आपला गणना करण्याचा प्रकार झाला असावा असें वाटतें. स्वारांचा दोन टोळ्या आहेत, त्यांतून कोणत्या टोळींत संख्या अधिक आहे हें समजावें आणि प्रत्येक टोळीमध्यें किती स्वार आहेत हेंहि स्मरणांत ठेवतां यावें, असें एक पुरुष इच्छितो आहे, असें मनांत आण.

२. पहिली टोळी त्याचे समोरून जाते समयीं, त्यांतील प्रत्येक मनुष्य जें त्याचे दृष्टीस पडतें, त्याबद्दल तो पुरुष टोपलींत एक खडा टाकितो असें मनांत आण. प्रत्येक स्वाराविषयीं एकएक खडा आहे, ह्मणजे व्यवहारी बोलण्याप्रमाणें खड्यांची आणि स्वारांची संख्या सारिखीच आहे, याशिवाय खड्यांचा आणि स्वारांचा दुसरा कांहीं संबंध नाहीं. जासमयीं दुसरी टोळी त्याचे समोरून जाती, तेव्हां तो दुसऱ्ये टोपलींत प्रत्येक मनुष्याबद्दल एक एक खडा टाकितो असें मनांत आण; अशाने त्याजवळ खड्यांचा दोन टोपल्या होतील, तेणेंकरून प्रत्येक टोळीमध्यें किती स्वार आहेत, हें त्याचाने दुसऱ्या पुरुषास सांगवेल. आणि कोणती टोळी मोठी आहे, अथवा कोणतींत अधिक स्वार आहेत, असें जेव्हां तो जाणायास इच्छितो, तेव्हां तो प्रत्येक टोपलींतून एक एक खडा काढून त्यास एकीकडे वेगळाले ठेवील. नंतर त्यांतून एक टोपली रिकामी होईपर्यंत याप्रमाणें करित जाईल. नंतर त्यास जर समजेल, कीं दुसरीहि टोपली रिकामी झाली, तर तो असें ह्मणेल कीं दोहों टोळ्यांमध्यें स्वारांची संख्या सारिखीच आहे; आणि जर दुसऱ्ये टोपलीमध्यें कांहीं खडे राहिले, तर पहिल्ये टोळीपेक्षां दुसरींत किती स्वार अधिक होते, तें ह्या राहिल्या खड्यांचा योगाने त्यास सांगतां येईल.

३. जा संख्या रानटी मनुष्यास अगत्याने स्मरणांत ठेवण्याचा असतील, त्यांची गणना त्यास वर सांगीतलेल्या तऱ्हेने ठेवतां आली असावी. तशाच तऱ्हेने त्याचे मुलाबाळांची, किंवा गुरांची, किंवा उन्हाळे व हिंवाळे जितके त्याणें पाहिले असतील त्यांची गणती, खड्यांनीं, किंवा दुसऱ्या कांहीं लहान वस्तू, जा पुष्कळपणीं सांपडतात, त्यांहींकरून त्याणें ठेविली असावी. सांप्रतकाळींहि रानटी लोकांमध्यें अशा कांहीं तऱ्हेचा प्रकार आहे, आणि यापेक्षां चांगल्ये रीतीची गणण्याची कल्पना निघाल्यानंतरहि कित्येक जागीं ती रीति तसीच राहिली आहे. रोम शहरामध्यें प्रजाधिपत्याचे वेळेस, तें शहर वसल्यापासून वर्षें किती झालीं हें समजावें, ह्मणून तेथील मुख्य न्यायाधीश, बृहस्पतीचा देवळाचा दारांत प्रतिवर्षीं खिळा मारावा ह्मणून मोठे समारंभाने जात असे; शहर वसविल्यास किती वर्षें झालीं याचें स्मरण ठेवण्याची असी एक रीति होती, यावरून ती गणनेची युक्ती निघाल्याचे पूर्वीं निघाली असावी असा संभव होतो.

त्यांस काळानुक्रमानें नांवें ठेविलीं असावीं. परंतु जोंपर्यंत केवळ लहान संख्या मोजण्याची गरज होती, तोंपर्यंत त्यांचे मोजण्याचा सोयवार निर्वाह बोटांनीं झाला असावा. जा कांहीं कामाकरितां थोड्या मोजण्याची गरज पडे, तेव्हां तीं कामें कोणताहि पुरुष आपल्या दोन्हीं हातांचा बोटांनीं करित असे, आणि बोटांचे वेगळाले समुदायांस नांवेंहि देत असे. झणजे, एक, दोन, तीन, चार, पांच, सहा, सात, आठ, नर्उ, दहा, यांचे अर्थाचे शब्द त्याणें स्वभाषेंत काढले असावे. जसा जसा त्याचा व्यवहार अधिक वाढला असेल, त्याप्रमाणें त्यास अधिक मोठ्ये संख्यांस नांवें देण्याचें, अगत्य पडलें असेल; परंतु जा सगळ्या संख्या कामांत आणाव्या लागल्या असतील, त्या सांगण्यासाठीं अतिशय शब्दांचें प्रयोजन लागलें असेल, आणि त्यांचा अतिशयपणा पाहून तो कुंठित झाला असावा. यावरून कित्येक पहिल्या मूळ अंकांस वेगळालीं नांवें देऊन, त्यांचा योगानें सर्व दुसऱ्या संख्या त्यास सांगतां आल्या असाव्या.

५. या सर्व गोष्टींचा क्रम आतां दाखवितों. या पुढील कोष्टकांत दहांचे पुढील जे अंक येतात, ते एक ओळींत मांडले आहेत, आणि दुसऱ्ये ओळींत त्यांचे पूर्वीचे अंकांचा संबंध दाखविला आहे.

एक.	अकरा	झणजे	दहा आणि एक.
दोन.	बारा		दहा आणि दोन.
तीन.	तेरा		दहा आणि तीन.
चार.	चौदा		दहा आणि चार.
पांच.	पंध्रा		दहा आणि पांच.
सहा.	सोळा		दहा आणि सहा.
सात.	सतरा		दहा आणि सात.
आठ.	अठरा		दहा आणि आठ.
नर्उ.	एकुणीस		दोन दहा उणा एक.
दहा.	वीस		दोन दशक.

एकवीस	दोन दशक आणि एक.	पन्नास ह्मणजे	पांच दशक.
बावीस	दोन दशक आणि दोन.	साठ	सहा दशक.
इत्यादि	इत्यादि.	सत्तर	सात दशक.
तीस	तीन दशक.	ऐशीं	आठ दशक.
इत्यादि	इत्यादि.	नव्वद	नऊ दशक.
चाळीस	चार दशक.	शंभर	दहा दशक.
इत्यादि	इत्यादि.		

एकशें एक	दहा दशक आणि एक.
इत्यादि	इत्यादि.
हजार	दहा शतक.
दहा हजार	शंभर शतक.
लक्ष अथवा शंभर हजार.	
दशलक्ष	दहा शंभर हजार अथवा हजार वेळा हजार.

कोटी.
दश कोटी.
इत्यादि.

६. गणनेमध्यें जें वारंवार कृत्य करावें लागतें, तें व्यवहारी भाषेचे शब्दांनीं लिहिण्यास अति लांब पडेल. याकरितां शब्दांचे जागीं लहान चिन्हें घेतलीं असतील; परंतु प्रत्येक निरनिराळे अंकास भिन्नभिन्न चिन्हें देण्यास असाध्य, ह्मणून कांहीं थोडकीं चिन्हें घेऊन, त्यांचा योगाने बाकीचा सर्व अंकांविषयीं दुसरीं चिन्हें योजण्यास सोईस पडलें असेल. आतां जीं चिन्हें हालीं कामांत आणितात, तीं पुढील-प्रमाणें आहेत.

०,	१,	२,	३,	४,	५,	६,	७,	८,	९.
शून्य,	एक,	दोन,	तीन,	चार,	पांच,	सहा,	सात,	आठ,	नऊ.

ज्या रीतीने या चिन्हांपासून दुसरे अंक दाखवितां येतात, ती रीति आतां दाखवितो.

७. कोणीएक पुरुष, पहिल्याने आपलें एक बोट वर करितो, नंतर दोन बोटें, आणि याप्रमाणें, सगळीं बोटें वर होतपर्यंत क्रमाने वर करित जातो असी कल्पना कर, आणि याप्रमाणेंच, दुसरे कित्येक पुरुष करि-

कडून कांहीं बोट वर करविल्यानें, एक अंकापासून दुसरा अंक निराळा आहे, असें दाखवितां येईल; आणि असें अनेक तऱ्हांनीं करितां येईल हें स्पष्ट आहे. उदाहरण, पंधरा हा अंक पंधरा पुरुषांनीं एक एक बोट उंच केल्यानें, अथवा चार पुरुषांनीं दोन दोन, आणि पांचव्यानें सात बोटें वर केल्यानें दाखवितां येईल, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. तो अंक दाखविण्यासाठीं, या सर्व युक्तींतून कोणती अति सुलभ पडेल? ही शंका उत्पन्न होती, याकरितां जी युक्ति निवडून काढिलेली आहे, तिला **अंकसंख्या लेखनवाचनरीति** ह्मणतात.

८. मुलें जेव्हां पहिल्यानें गणना करावयास लागतात, तेव्हां बहुत करून बोटांनीं मोजितात, आणि अशा चालीवरून संभव होतो, कीं ही आपली गणना करण्याची रीति, आणि बहुतकरून पृथ्वींतील बाकीचा सर्व गणना करण्याचा रिती उत्पन्न झालेल्या असाव्या, ह्मणून वरचें व्याख्यान केलें आहे. जी रीति वर सांगीतली ती केवळ रानटी आहे; परंतु, त्यांत किंचित् फेरफार केल्यानें, अतिशय मोठा अंक सुलभपणीं दाखवितां येईल, असा प्रकार काढितां येईल.

९. मनांत आण कीं कांहीं मोठी संख्या मोजावयाची आहे, जसें वस्त्राचे कित्येक यार्ड मोजावयाचे आहेत. तुझे समोर एक मनुष्य बसविला आहे, ज्याची दृष्टी तुझेकडे असून, तूं जसा एक एक यार्ड मोजीत जातोस, तसा तो आपलें एक बोट वर करितो असें मनांत आण. जेव्हां दहा यार्ड मोजिले गेले, तेव्हां त्या पुरुषाचीं दहा बोटें वर झालीं असतील, आणि पुनः आरंभ केल्यावांचून, त्याला पुढें मोजतां येणार नाहीं, ह्मणून अकरावे यार्डास तो एक बोट पुनः वर करील, आणि बारावे यार्डास दोन, आणि याप्रमाणें पुढें. परंतु किती यार्ड मोजिले गेले हें जाणायासाठीं, केवळ त्याचीं बोटें वर जितकीं आहेत, तितक्यांनीं पुरें माहित होणार नाहीं, परंतु त्याणें कितीवेळा पुनः पुनः आरंभ केला हें जाणलें पाहिजे. आतां मनांत आण कीं पहिल्या पुरुषाचे उजवेकडे दुसरा पुरुष बसविला आहे, आणि त्याची दृष्टी पहिल्यावर असून, तो पहिले पुरुषास पुनः प्रारंभ करितांना पाहतांच, ह्मणजे जेव्हां दहा यार्डांचें मोजणें संपतें, तत्क्षणीं तो आपलें एक बोट वर करितो. पहिल्या पुरुषाचें प्रत्येक बोट केवळ एक यार्डाचें दर्शक

आहे, परंतु दुसऱ्या पुरुषाचें प्रत्येक बोट पहिल्या पुरुषाचे सर्व बोटांचे, ह्मणजे, दहांचें दर्शक आहे. या तऱ्हेने शंभर पर्यंत मोजितां येईल, कां कीं दुसऱ्या पुरुषाचें एक बोट वर होण्याकरितां पहिल्या पुरुषाने आपलीं दहा बोटें एकवेळ मोजावीं, आणि दुसऱ्याचीं सर्व बोटें वर होण्याकरितां पहिल्या पुरुषाने आपलीं बोटें दहावेळ मोजावीं, यावरून (५) कलमाप्रमाणें, दहा दशक ह्मणजे शंभर. आतां दुसऱ्या पुरुषाचे उजव्येकडे तिसरा एक पुरुष बशिवला, तो जेव्हां दुसऱ्या पुरुषास पुनः पुनः प्रारंभ करिताना पाहील, तेव्हां तो आपलें एक बोट वर करील. या तिसऱ्या पुरुषाचें एक बोट दुसऱ्या पुरुषाचे सर्व दहा बोटांचे गणनेबरोबर, ह्मणजे, शंभरांबरोबर आहे. या तऱ्हेने तिसऱ्या पुरुषाचीं सर्व बोटें वर होतपर्यंत मोजितां येईल, आणि त्यापासून (५) कलमाप्रमाणें दहा शतक, किंवा एक हजार मोजले गेले असें कळेल. चवथ्या पुरुषाचे योगाने दहा हजारपर्यंत, पांचव्या पुरुषाचे योगाने लक्षपर्यंत, साहव्या पुरुषाचे योगाने दहा लक्षपर्यंत मोजण्याचें सामर्थ्य येईल; आणि याप्रमाणें पुढेहि.

१०. प्रत्येक नवा पुरुष तुझे समोरचे ओळींत तुझे डाव्येकडे बसला आहे. आतां खालचेप्रमाणें कांहीं कोष्टक कर, आणि जे अंक दाखविण्याची इच्छा आहे, ते अंक त्या कोष्टकाचे उजव्येकडे शब्दांनीं लिही ; तें मोजणें झाल्यानंतर पहिल्या पुरुषाचीं जितकीं बोटें वर असतील, त्यांची संख्या उजव्येकडचे पहिले ओळींत मांड, नंतर दुसऱ्या पुरुषाचीं जितकीं बोटें वर असतील, तितकी संख्या डाव्येकडचे दुसऱ्ये ओळींत मांड ; याप्रमाणें पुढेहि कर.

	वा.	वा.	वा.	गा.	गा.	गा.	अं.	
१						५	७	सत्तावन.
२					१	०	४	एकशें चार.
३					१	१	०	एकशें दहा.
४				२	३	४	८	दोन हजार तीनशें अठ्येचाळीस.
५			१	५	९	०	६	पंधरा हजार नऊशें सहा.
६		१	८	७	०	०	४	एक लक्ष सत्यायशीं हजार चार.
७	३	६	९	७	२	८	५	छत्तीसलक्ष सत्याण्णव हजार दोनशें पंचायशीं.

११. १ यांत सत्तावन हा अंक दाखविला आहे. याचा अर्थ (५) प्रमाणें पांच दशक आणि सात आहे. यामुळें पहिल्या पुरुषानें आपलीं सर्व बोटें पांचवेळा मोजून, त्यावर सात बोटें अधिक मोजिलीं आहेत. दुसऱ्या पुरुषाचीं पांच बोटें, आणि पहिल्या पुरुषाचीं सात बोटें उंच केल्यानें, हें दाखवितां येतें. २ यांत एकशें आणि चार हा अंक दाखविला आहे. हा अंक (५) प्रमाणें दहा दशक आणि चार इतका आहे. यामुळें यांत दुसऱ्या पुरुषानें आपलीं सर्व बोटें एकवेळा मोजिलीं आहेत, हें तिसऱ्या पुरुषानें एक बोट उंच केल्यानें दाखवितां येतें; परंतु दुसऱ्या पुरुषानें फिरून मोजावयास आरंभ केला नाहीं, कां कीं, पहिल्या पुरुषानें दहापर्यंत मोजल्यापावेतों तो एक बोट उंच करित नाहीं, आणि त्या दहांतून केवळ चार मात्र मोजिले. जेव्हां पहिला पुरुष ते दहा मोजितो, तेव्हां दुसरा पुरुष एक बोट उंच करितो. आणि पहिला पुरुष फिरून आरंभ करायास तयार असून, त्याणें कांहीं बोटें वर केलीं नाहीं, आणि जो अंक याप्रमाणें निघाला तो अकरा दशक, किंवा दहा दशक आणि एक दशक, किंवा एक शतक आणि दहा. हा पक्ष वरच्या तिसऱ्या उदाहरणांत आहे. आतां कोष्टकांतील सगळ्या दुसऱ्या अंकाविषयीं कांहीं अवघड पडणार नाहीं.

१२. या सर्व अंकांतून जो अंक पहिल्ये ओळींत लिहिला आहे, त्याचा अर्थ (६) कलमामध्यें जो त्या अंकाखालीं लिहिला आहे, तितके याई मात्र दाखवितो. जो अंक दुसऱ्ये ओळींत लिहिला आहे, तो

तितके यार्डांचा नाहीं, परंतु तो यार्डांचे तितके दशक दाखवितो; जो अंक तिसऱ्ये ओळींत लिहिला आहे, तो यार्डांचे तितके शतक दाखवितो; जो अंक चवथ्ये ओळींत लिहिला आहे, तो तितके सहस्र दाखवितो; आणि याप्रमाणें पुढेंहि; ह्मणजे, जर कोणताहि अंक कोणत्येहि ओळींतून त्याचे डाव्येकडचे ओळींत जाईल, तर तो त्याचे पूर्वीं जितके यार्ड दाखवीत होता, त्याचे दहापट किमतीचा होईल. ही गोष्ट पक्की स्मरणांत ठेविली असतां ओळींमध्यें रेघा करण्याचें प्रयोजन नाहीं, कां कीं अंकाचे **स्थितीपासून** प्रत्येक अंकाची पुरतेपणीं किंमत समजण्यांत येईल; ह्मणजे जितके अंक त्याचे उजव्येकडेस असतील त्यांवरून कळेल.

१३. आपल्या ह्या अंक लिहिण्याचे रीतीचा इतका सहवास झाला आहे, कीं ती मूळची असावी असी दिसती, तथापि ती कोणत्येहि दुसऱ्ये रीतीपेक्षां अधिक मूळची नाहीं, हें स्मरणांत ठेवायास योग्य आहे. उदाहरण, एक दशक दाखविण्याविषयीं, एक या अंकाचे बाजूस एक स्वरचिन्ह केल्यानें निर्वाह होतो असें जर कदाचित् मानिलें, जसें १′; वीस अथवा दोन दशक, २′ याणें दर्शवितां येतील; आणि याप्रमाणें पुढेंहि; शंभर अथवा दहा दशक १″ याणें; सहस्र १‴ याणें; आणि याप्रमाणें पुढेंहि. या रीतीनें कोष्टकांतील चवथी संख्या याप्रमाणें लिहितां येईल, ह्मणजे २‴ ३″ ४′ ८, आणि हे तर याप्रमाणेंहि मांडितां येतील, ह्मणजे ८ ४′ ३″ २‴, ४′ ८ ३″ २‴; अथवा अंकाची रचना कोणत्येहि भिन्न भिन्न तऱ्हेनें करितां येईल, कां कीं त्यांचा अर्थ त्यांचे डोक्यावरील स्वर चिन्हावरून होतो, त्यांचा स्थितिक्रमापासून होत नाहीं. यावरून असे रीतीमध्यें शून्याचें कधींहि प्रयोजन पडणार नाहीं; कां कीं १०४ आणि १४ यांचें तारतम्य या रीतीनें कळेल, ह्मणजे पहिला १″४, आणि दुसरा १′४ अशानें कळेल. जी हालीं व्यवहारांत रीति आहे, ती यापेक्षां खरी आणि बरोबर आहे, याकरितां मान्य झाली असें नाहीं, परंतु ती हिजपेक्षां सोपी आहे यास्तव मान्य झाली आहे.

१४. प्रत्येक अंकाचा अर्थ कांहींसा स्थानापासून कळतो, हा भेद आमचे, आणि आमचे पूर्वजांचे अंकसंख्या लेखन वाचनाचे रीतीमध्यें आहे. जसें, ४४४४४ यांत प्रत्येक चार कांहीं वस्तूचे चार दाख-

... त्यांतून उजव्येकडील पहिल्या स्थळींचा अंक, चार मात्र दाखवितो; दुसऱ्या स्थळींचा, दहा खड्यांचे असे चार समुदाय दाखवितो; तिसऱ्या स्थळींचा, शंभरांचे चार समुदाय दाखवितो; आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

१५. (११) या कलमांत जी वस्तु मोजिली गेली, ते कापडाचे यार्ड होते. त्या पक्षांत कापडाचा जो एक यार्ड त्यास **एकं** ह्मणतात. उजव्येकडील जो पहिला अंक आहे, त्यांत (६) कलमाप्रमाणें जितके एकं आहेत, तितके एकंचा तो दर्शक आहे, ह्मणून तो **एकंचे स्थळीं** आहे असें ह्मणतात. दुसऱ्या अंकांत जितके एकं आहेत, तितके दशक तो दाखवितो, ह्मणून तो **दहंचा स्थळीं** आहे असें ह्मणतात. तशेंच कारणावरून तिसरा, चवथा, आणि पांचवा हे अंक, **शतं**, **सहस्त्र** आणि **दशसहस्त्र** यांचे स्थळीं आहेत असें ह्मणतात.

१६. मोजलेलें परिमाण जर भूमीचे एकर असते, तर एकं ह्मणजे जा वस्तू मोजिल्या त्यांतून **एक** आहे, यावरून भूमीचा एक एकरास एकं असें ह्मटलें असतें. परिमाणें दोन जातींचीं असतात; ह्मणजे जामध्यें एकंची पूर्ण संख्या आहे, जसें ४७ यार्ड, आणि जामध्यें तसी संख्या नाहीं, जसें ४७ यार्ड आणि अर्धा. या दोहों जातींतून पहिल्याने पूर्ण अंकाचा विचार करितों.

१७. गणितांमध्यें बहुतकरून सर्व परिमाणांस एक जातीचा एकं असावा. २ आणि ३ मिळून ५ होतात, यावरून २ यार्ड आणि ३ फुटी मिळून, ५ **यार्ड** किंवा ५ **फुटी** होतात असें ह्मणवत नाहीं; तथापि २ **यार्ड** आणि ३ **यार्ड** मिळून, ५ **यार्ड** होतात, आणि २ **फुटी** आणि ३ **फुटी** मिळून, ५ **फुटी** होतात असें ह्मणतां येईल. एक जातीचें परिमाण दुसऱ्ये जातीचे परिमाणाचे एकंने मोजणें ही अयुक्तिक गोष्ट होईल; ह्मणजे एक ग्यालनांत किती यार्ड आहेत, अथवा पाण्याचे मापांत दाण्याचे किती शेर आहेत, असें सांगणें निरर्थक आहे.

१८. कांहीं जातीचे एकंचे संख्येविषयीं जा गोष्टी खऱ्या आहेत, त्या दुसऱ्ये जातीचे एकंचे त्याच संख्येविषयीं खऱ्या आहेत. जसें, १५ खडे आणि ७ खडे मिळून २२ खडे होतात; १५ एकर आणि ७ एकर मिळून २२ एकर होतात. यावरून १५ आणि ७ मिळून २२ होतात असें ह्मणतां येतें, ह्मणजे अर्थ हाच कीं एक जाती-

चा १९ वस्तू, आणि त्याचे जातीचा ७ वस्तू मिळून, त्याचे जातीचा २२ वस्तू होतात, त्या वस्तू खडे किंवा स्वार किंवा भूमीचे एकर किंवा दुसऱ्या कोणत्याहि जातीचा वस्तू असतील. सारांश १९ आणि ७ मिळून २२ होतात, याशिवाय याविषयीं दुसरें कांहीं लिहिण्याचें प्रयोजन नाहीं. यामुळें खडे किंवा एकर अशा निरनिराळ्या वस्तूंचा एकंविषयीं या विषयाचे या भागांत पुनः कांहीं बोलणार नाहीं, परंतु केवळ अंकांविषयीं मात्र सांगितलें जाईल.

१९. या अध्यायांत जा मुख्य गोष्टी सांगितल्या त्या एथें पुनः सांगतों.

पहिल्याने, दहा चिन्हें कामांत घेतलीं आहेत, ह्मणजे एक चिन्ह शून्याचे जागीं, आणि बाकी चिन्हें पहिल्या नऊ अंकांचे जागीं घेतलीं आहेत तीं याप्रमाणें.

०, १, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९, यांतून पहिल्याला **शून्य** ह्मणतात.

दुसऱ्याने, यापेक्षां मोठ्या अंकांकरितां निरनिराळीं चिन्हें नाहींत, परंतु वर सांगितलेलीं चिन्हें एकाचे बाजूस एक मांडल्याने, आणि जो उजव्येकडचा पहिला अंक आहे, तो एकटा मांडला असतां जी त्याची किंमत असती तीच तो ठेवील; उजव्येबाजूचा दुसरा अंक, एकटा मांडिला असतां जी त्याची किंमत असती, तिचे दहावेळा किंमतीचा अर्थ ठेवील; उजव्ये बाजूचा तिसरा अंक, एकटा मांडिला असतां जी त्याची किंमत असती, तिचे शंभरवेळा किंमतीचा अर्थ ठेवील; चवथा अंक तितक्याचे सहस्रवेळा; आणि याप्रमाणें पुढेंहि; असें मान्य केल्यानें मोठे अंक दाखवितां येतात.

तिसऱ्याने, उजव्ये बाजूचा पहिला अंक **एकंचे स्थळीं**, त्याचे डाव्ये बाजूचा अंक **दहंचे स्थळीं**, तिसरा **शतंचे स्थळीं**, आणि याप्रमाणें पुढें आहेत असें ह्मणतात.

चवथ्याने, जेव्हां कोणताहि अंक दशक, शतक किंवा सहस्र, इत्यादि बरोबर पूर्ण संख्या आहे, तेव्हां इच्छिलेले संख्येचे स्थळीं तो अंक येई इतकीं त्याचे उजव्येकडे शून्यें मांडिलीं पाहिजेत, याविषयीं हीं पुढील उदाहरणें आहेत.

सातशें.......................... ७००
पांचलक्ष अठ्ठावीस हजार........... ५२८०००

यांत शून्यें नसतील, तर नुसते अंक ५,७,५२८ हे आहेत असे चुकून समजांत येतील.

पांचव्याने, एकं, दहं इत्यादि संज्ञांतून कोणत्येहि एक संज्ञेचें जागीं अंक नसेल, तर अंकाचे मध्यें शून्य मांडावें लागतें. जसें, वीस हजार आणि सहा हे २०००६ आहेत, दोनशें सहा हे २०६ आहेत. अंकाचे आरंभीं शून्य मांडितां येईल, परंतु तेथें त्याचा कांहीं अर्थ नाहीं. जसें ०२६ हे आणि २६ एकच आहेत, कां कीं त्यांत शतें नाहींत इतकें मात्र शून्य दाखवितें आणि ही गोष्ट केवळ अंकापासून स्पष्ट आहे.

२०. १६७८५ अशा भलत्या कोणत्याहि अंकांतून, कोणतेहि जवळजवळचे अंक काढिले, जसें ६७, आणि जर असें विचारिलें, कीं या सतसष्टांचा अर्थ काय आहे? ते कोणत्या परिमाणाचे सतसष्ट आहेत? तर उत्तर हेंच, कीं जा स्थळीं ७ हा अंक त्या संख्येंत होता, तशाच समुदायाचे सतसष्ट; ह्मणजे, ६७ शतक आहेत. कां कीं ६ हे सहा सहस्र, किंवा सहा दशशतक, किंवा साठ शतक आहेत; हे साठ शतक आणि दुसरे ७ शतक मिळून, ६७ शतक आहेत; याचप्रमाणें, ६७८ हे ६७८ दशक आहेत. यावरून हे अंक या पुढील कोणत्येहि रीतीनें सांगतां येतील.

१ दहा हजार ६ हजार ७ शतक ८ दशक आणि ५;
अथवा १६ हजार ७८ दशक आणि ५;
अथवा १ दहा हजार ६७८ दशक आणि ५;
अथवा १६७ शतक ८ दशक आणि ५;
अथवा १६७८ दशक आणि ५, आणि याप्रमाणें पुढें.

२१ अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

पहिलें. या पुढील अंकांचीं चिन्हें मांड.
चारशें शाहात्तर;
दोन हजार सत्याण्णव;
चौसष्ट हजार तीनशें पन्नास;

दोन कोटी सातशें चार ;

सत्तावन कोटी ऐशींलाख.

दुसरें. हे पुढील अंक शब्दांनीं लिही, ५३,१८०५,१८३०, ६६७०७, १८०९१७३२४, ६६७१३७२१, ९०९७६३९०, २५००००००.

तिसरें. ९९९९९ अशा ज्या अंकसंख्येमध्यें केवळ नऊ हीं चिन्हें आहेत, त्यास एक मिळविला असतां, त्यांत काय भेद होईल तो सांग?

चवथें. कांहींएक संख्येमध्यें पांच अंक आहेत, आणि दुसरीमध्यें चार अंक आहेत, आणि जरी पहिल्ये संख्येमध्यें सगळे अंक लहान आहेत, आणि दुसरीमध्यें सगळे मोठे आहेत, तरी पहिली संख्या दुसरीपेक्षां मोठी आहे हें दाखीव? उदाहरण, १०१११ ही संख्या ९८७९ या संख्येपेक्षां मोठी आहे हें दाखीव?

२२. कित्येक शुद्ध चिन्हांचीं स्थळें जशीं बदलतात, तशा त्यांचा किमतीहि बदलतात, अशा कल्पनेवरून आपल्या लेखनवाचनरीतीचा सुलभपणा लक्ष्यांत येईल. व्यवहारांतील ज्या सगळ्या वस्तू कामांत आणितात, त्यांची तशेच रीतीनें गणना केल्यानें तसेंच हित होतें. उदाहरण, रुपये, आणे, आणि पै, असे पैक्याचे विभाग केल्यानें पैका मोजतां येतो, यांतून एक आणा ह्मणजे १२ पै आहेत, आणि एक रुपया ह्मणजे १६ आणे आहेत, अथवा १९२ पै. रुपये, आणे, पै यांस वेगळाले तीन ओळींत मांडितात, आणि प्रत्येक ओळीचे मध्यें बिंदू मांडितात. जसें, २६३ पै यांस केवळ २६३ असे मांडीत नाहींत, परंतु रु१. ९. ३, मांडितात यांत रु यापासून असें समजावें कीं पहिली ओळ रुपयांची आहे. ही एक अंकसंख्या लेखनवाचनाची परिपाठी आहे, जींत उजव्येकडून दुसऱ्ये ओळीचा अंक, पहिल्ये ओळीचे त्याच अंकाचे १२ पट मोठा आहे, आणि जो अंक तिसऱ्ये ओळींत येतो, तो दुसऱ्ये ओळींतील त्याच अंकाचे १६ पट आहे, अथवा पहिले ओळीचे त्याच अंकाचे १९२ पट मोठा आहे. यापुढें जे कोष्टक पाहण्यांत येतील त्यांत अंकसंख्या लेखनवाचनाची दुसरी परिपाठी पाहण्यांत येईल, परंतु सर्वांविषयीं गणना करण्याचा रिती एकसारिख्याच होतील.

२३. अंकगणिताची भाषा संक्षिप्त करण्याकरितां, कांहीं दुसरीं चिन्हें कामांत घेतात. तीं या पुढीलप्रमाणें आहेत:

पहिलें. [illegible] वयाचे आहेत, ते आणि ५३ एकच आहेत. हीं १५ आणि ३८ यांची **बेरीज** आहे, आणि त्यांस याप्रमाणें वाचितात ह्मणजे पंधरा अधिक अडतीस.

दुसरें. ६४−१२ याचा अर्थ हाच कीं ६४ यांतून १२ वजा करायाचे आहेत, आणि ते आणि ५२ एकच आहेत. हीं ६४ आणि १२ यांची **वजाबाकी** आहे, आणि त्यांस याप्रमाणें वाचितात ह्मणजे चवसष्ट **उणे** बारा.

तिसरें. ९×८ याचा अर्थ हाच, कीं ९ हे ८ वेळा घेण्याचे आहेत, आणि ते आणि ७२ एकच आहेत. हा ९ आणि ८ यांचा **गुणाकार** आहे, आणि त्यांस नऊ **गुणिले** आठ याप्रमाणें वाचितात.

चवथें. $\frac{१०८}{६}$ याचा अर्थ हाच कीं १०८ हे ६ नीं भागायाचे आहेत, अथवा १०८ यांमध्यें कितीवेळा ६ आहेत हें काढायाचें; आणि ते आणि १८ एकच आहेत. हा १०८ आणि ६ यांचा **भागाकार** आहे; आणि त्यांस एकशें आठ **भागिले** सहांनीं असें वाचितात.

पांचवें. जेव्हां भलते दोन अंक, अथवा अंकांचे समुदाय, वर लिहिलेल्या चिन्हांनीं युक्त असून, एकसारिखे असतात, तेव्हां त्यांचेमध्यें = हें चिन्ह मांडितात. असें, ७ आणि ५ मिळून १२ होतात, आणि त्यास ७+५=१२, असें मांडितात. यास **समीकरण** ह्मणतात, आणि त्यास सात **अधिक** पांच **बरोबर** बारा असें वाचितात. याचप्रमाणें हवीं तेवढीं समीकरणें केलीं जातील हें स्पष्ट आहे. जसें

$$७ + ९ - ३ = १२ + १;$$

$$\frac{१२}{२} - १ + \overline{३ \times २} = ११,$$ आणि याप्रमाणें पुढें.

२४. जें केवळ एक अंकाविषयीं खरें आहे असें नाहीं, परंतु तें सर्व अंकांविषयीं खरें असतें, त्याविषयीं बहुधा कांहीं बोलण्याचा प्रसंग पडतो. उदाहरण, १० आणि ७ हे दोन अंक घे; त्यांची बेरीज[+] १७ आहे, त्यांची वजाबाकी ३ आहे. जर ही बेरीज आणि ही वजाबाकी मिळविली तर २० होतील, ह्मणजे हे पूर्वी घेतलेल्या दोन अंकांतून मोठ्या अंकाचे दुप्पट आहेत. जर १७ तून ३ वजा केले, तर १४

[+] पुस्तकाचे या भागांत जें लहान गणित करावें लागतें, तें बोटांनीं अथवा खड्यांनीं करितां येईल.

होतात, हे त्या दोन अंकांतून लहानाची दुप्पट आहेत. कोणत्याहि दोन अंकांविषयीं ही गोष्ट खरी आहे असें दिसेल, आणि त्यावरून ही सामान्य प्रतिज्ञा निघती; जर कोणत्याहि दोन अंकांची बेरीज आणि वजाबाकी मिळविली, तर ती बेरीज त्या दोन अंकांतून मोठ्या अंकाचे दुप्पट होईल; जर त्यांचे बेरिजेंतून त्यांची वजाबाकी वजा केली, तर बाकी त्या दोहोंतून लहान अंकाचे दुप्पट होईल. यावरून, जर भलते कांहीं अंक घेतले, आणि त्यांस पहिला अंक आणि दुसरा अंक असें ह्मटलें, आणि जर पहिला अंक दुसऱ्या अंकापेक्षां मोठा असेल; तर या पुढीलप्रमाणें होईल.

(पहि० अं० +दुस० अं०)+(पहि० अं०-दुस० अं०)=दुप्पट पहि० अं०
(पहि० अं० +दुस० अं०)-(पहि० अं०-दुस० अं०)=दुप्पट दुस० अं०

वेगवेगळाल्या कुंडल्या जोडणारीं जीं चिन्हें आहेत तीं कामांत आणण्याचे पूर्वीं, जें कुंडलींत करायास सांगीतलें तें पहिल्याने केलें पाहिजे. जसें, ८-(२+१)×(१+१) याचा अर्थ हाच कीं २+१ हे पहिल्याने १+१ वेळा घ्यावे, नंतर तो गुणाकार ८ तून वजा करावा. तशाच रितीनें दोन किंवा अधिक अंकांनीं जें उत्तर येतें, आणि ते अंक कसेहि असोत त्याविषयीं जर तें उत्तर खरें आहे, तर पहिला अंक, दुसरा अंक इत्यादि त्यांचे जागीं मांडून, आणि (२३) कलमांतील चिन्हें कामांत आणून तें उत्तर दाखवितां येईल. परंतु यास यापेक्षां अधिक संक्षेपरूप देतां येईल, कां कीं पहिला अंक, दुसरा अंक, इत्यादि हे भलत्या कोणत्याहि अंकाचे दर्शक होतील, तर अशा शब्दांचा जागीं अ आणि ब हीं अक्षरें कामांत आणितां येतील; आणि आतां लक्ष्यांत ठेविलें पाहिजे कीं कोणत्याहि दोन अंकांचे स्थळीं अ आणि ब आहेत, आणि त्यांत ब पेक्षां अ मोठा आहे. दोन वेळा अ दाखविण्यासाठीं २अ घे, आणि दोन वेळा ब दाखविण्यासाठीं २ब घे. तर समीकरणें या पुढीलप्रमाणें होतात.

(अ + ब) + (अ - ब) = २ अ
(अ + ब) - (अ - ब) = २ ब

खालीं लिहिल्याप्रमाणें याचा अधिक विस्तार होईल.

२५. मनांत आण कीं, कित्येक बंद केलेलीं पुडकीं आहेत. आणि त्यांवर बाहेरून अ, ब, क, ड, इत्यादि खुणा आहेत, त्या प्रत्येका-

किती किती आहेत, त्या ठाऊक नाहीत. जोपर्यंत प्रत्येक पुडक्यांत किती किती आहेत, हें ठाऊक नाहीं तोंपर्यंत पुडक्यावर जें अक्षर आहे, तें त्या चकत्यांचे जागीं घेतां येईल, ह्मणजे अ अक्षराने जें पुडकें खूण केलेलें आहे, त्यांतील चकत्यांचे अंकांचे जागीं अ संख्या आहे असें ह्मटलें जातें. आणि जरी चकत्यांचे संख्यांविषयीं अगदीं बरोबर ठाऊक नाहीं, तरी त्या अंकसंख्याविषयीं कांहींच ठाऊक नाहीं असें नाहीं; कां कीं सर्व अंकांमध्यें कांहीं तऱ्हेचे संबंध असतात, त्यांस अंकांचे **साधारण गुण** ह्मणतात. उदाहरण, भलता कांहीं अंक घेऊन, त्याणे तोच गुणून, त्या गुणाकारांतून एक वजा कर; नंतर घेतल्या अंकांतून एक वजा कर. ह्मणजे घेतलेला अंक एकाने वाढविला तितके वेळा दुसरा अंक पहिल्या अंकांत जाईल. ६ हा अंक घे, हा त्याणे तोच गुणिला तर ३६ होतात, त्यांतून एक वजा केला तर ३५ राहतात; पुनः, ६ तून एक वजा करून ५ होतात; आणि ५ हे ३५ मध्यें ७ वेळा जातात, ह्मणजे, ६ + १ वेळा. ही गोष्ट कोणत्याहि अंकाविषयीं खरी आहे, हें कळेल; आणि असें सिद्ध झाल्यावर जें पुडकें अ या अक्षराने अंकलें आहे, त्यांतील संख्येविषयीं किंवा अ संख्येविषयींहि खरें आहे असें ह्मणतां येईल. जर अ ने अ गुणिला हें दाखविण्यासाठीं अअ+ अशे तऱ्हेने मांडिला, तर (२३) प्रमाणें

$$\frac{अअ - १}{अ - १} = अ + १$$

२६. यावरून कांहीं अंकाविषयीं सांगीतल्यावांचून, जर त्याविषयीं कांहीं बोलण्याची इच्छा असेल, तर तो अंक दाखविण्यासाठीं अक्षर कामांत घेतात. जसें; भलता कांहीं अंक तीन भागांत विभागावयाचा आहे, तो अंक काय आहे, अथवा जा भागांत विभागावयाचा ते भाग काय आहेत, असें न विचारितां, त्या अंकाशीं अशी कृती केल्यापासून काय निघेल, त्याजवर तर्क करण्याची इच्छा आहे, असें मनांत आण. तो अंक दाखविण्यासाठीं अ घे, आणि जा भागांत तो विभागावयाचा

+ (२३) कलमाप्रमाणें अअ हा अ × अ असावा, परंतु एथें × या चिन्हाची गरज नाहीं. २ × ७ यांत, जे १४ आहेत त्यांशीं आणि २७ यांची घालमेल होऊं नये, ह्मणून या चिन्हास अंकांशीं कामांत आणितात.

आहे, ते भाग दाखविण्यासाठीं ब, क आणि ड घे. तर कल्पनेप्रमाणें,

अ = ब + क + ड.

याजवर तर्क करून उत्तरें काढितात, तीं केवळ कोणत्याहि एकच विशेष अंकाविषयीं खरीं आहेत असें नाहीं, परंतु सर्वांविषयीं खरीं आहेत. जसें, जर अंकांतून एक भाग वजा केला, तर दुसरे दोन भाग राहतील, अथवा

अ – ब = क + ड.

जर प्रत्येक भागाची दुप्पट केली, तर सर्व अंकाची दुप्पट होईल, अथवा

२अ = २ब + २क + २ड.

भागांतला कोणताहि एक भाग, जसा ड, यांतून क्ष अंक वजा केला, तर तितक्याने सगळा अंक कमी होईल, अथवा.

अ – क्ष = ब + क + (ड – क्ष)

अशा रीतीने अंकांचे साधारण गुणांवर तर्क करणें, हें बीजगणितविद्येचें काम आहे.

२७. अभ्यासासाठीं उदाहरणें.

जेव्हां अ = १२, ब = १८, क = ७, तेव्हां अ + २ ब – क याची किंमत काय आहे? उत्तर ४१.

जेव्हां अ = ६, आणि ब = २; तेव्हां $\frac{\text{अ अ} - \text{ब ब}}{\text{अ} - \text{ब}}$ याची किंमत काय आहे? उत्तर ८.

अ, ब, क आणि ड, यांचा पुढें लिहिलेल्या किमतींपासून, (अ+ब)× (क + ड) आणि अ + ब क + ड यांमध्यें अंतरें काय आहेत?

अ	ब	क	ड	उत्तरें.
१	२	३	४	१०
२	१२	७	१	२५
१	१	१	१	१

दुसरा भाग.

मिळवणी आणि वजाबाकी.

२८. अंकगणितांत जा कृतींत अंकांस वाढविणें, किंवा घटविणें, येत नाहीं असी कृति एकहि नाहीं. याकरितां खड्यांचे समुदायांनीं करवत नाहीं असी कांहींच कृति नाहीं. बहुतकरून, पहिल्याने खडे किंवा बोटें कामांत घेतलीं असतील. खडे घेऊन जा गणना लांब आणि श्रमांचा असतात, त्या एकदांच थोड्या श्रमाने व्हाव्या, ह्मणून संक्षिप्त गणण्याचा रिती काढल्या आहेत. त्यांतील मिळवणी, वजाबाकी, गुणाकार, आणि भागाकार, या चार मुख्य रिती आहेत; यांतून शेवटील दोन रिती आहेत, त्या पहिली आणि दुसरी यांस केवळ एकदांच करण्याकरितां आहेत.

२९. जेव्हां एक अंक दुसऱ्या अंकाने वाढविला आहे, तेव्हां जो अंक ते दोन अंक एकत्र केल्याने होतो, त्यास दोन अंकांची **बेरीज** ह्मणतात. दोन किंवा अधिक अंकांची बेरीज करण्याचे रितीला **मिळवणी** ह्मणतात, आणि पूर्वीं सांगितल्याप्रमाणें, जे अंक परस्पर मिळवायाचे आहेत, त्यांचामध्यें (+) असें चिन्ह मांडून मिळवणी दाखविली जाती.

मनांत आण कीं १८३४ आणि २७९९ यांची बेरीज करावयाची आहे. या अंकांची मिळवणी करावयाकरितां, त्यांचे तुकडे कर, ह्मणजे प्रत्येकाला एकं, दहं, शतं, सहस्र, असे विभाग;

१८३४ हे १ सहस्र ८ शतक ३ दशक आणि ४ आहेत;

२७९९ हे २ सहस्र ७ शतक ९ दशक आणि ९ आहेत.

प्रत्येक अंकाचे या रितीने चार भाग होतात, अर पहिल्याचे प्रत्येक भागाशीं, दुसऱ्याचा त्याचे खालचा प्रत्येक भाग मिळवून, जीं वेगळालीं उत्तरें येतात, तीं एकत्र केलीं असतां, १८३४ आणि २७९९ यांची मिळवणी होईल. पहिल्या अंकांत ४ एकं आहेत, दुसऱ्यांत ९ आहेत; यांस मिळविले असतां, बेरिजेंत १३ एकं येतील. पुनः पहिल्या अं-

कांत तीन दशक आणि दुसऱ्यांत ९ दशक मिळून बेरिजेंत १२ दशक येतील. पहिल्या अंकांत ८ शतक आणि दुसऱ्यांत ७ शतक मिळून बेरिजेंत १५ शतक येतील; आणि पहिल्या अंकांत १ सहस्र आणि दुसऱ्या अंकांत २ सहस्र मिळून बेरिजेंत ३ सहस्र येतील; यामुळें इच्छिली बेरीज याप्रमाणें आहे,

३ सहस्र, १५ शतक, १२ दशक, आणि १३ एकं.

या उत्तरास सोपें रूप देण्याकरितां, स्मरणांत ठेवावें कीं—

१३ एकं हे. . . . . १ दशक आणि ३ एकं आहेत.
१२ दशक हे. . . . . . . १ शतक आणि २ दशक आहेत.
१५ शतक हे. . . . . . . १ सहस्र आणि ५ शतक.
३ सहस्र हे. . . . . . . ३ सहस्र.

आतां, पूर्वीं केल्याप्रमाणें उजव्येकडचे अंक एकत्र करून, १८३४ आणि २७९९ यांची बेरीज होईल; ह्मणजे, ४ सहस्र, ६ शतक, ३ दशक, आणि ३ एकं, यांस (१९) कलमावरून याप्रमाणें मांडितात ४६३३.

३०. वरची कृति, (२३) कलमाप्रमाणें चिन्हांनीं मांडिली असतां, या पुढीलप्रमाणें होते;

$$१८३४ = १ \times १००० + ८ \times १०० + ३ \times १० + ४$$
$$२७९९ = २ \times १००० + ७ \times १०० + ९ \times १० + ९$$

यामुळें,

$$१८३४ + २७९९ = ३ \times १००० + १५ \times १०० + १२ \times १० + १३$$

परंतु
$$१३ = १ \times १० + ३$$
$$१२ \times १० = १ \times १०० + २ \times १०$$
$$१५ \times १०० = १ \times १००० + ५ \times १००$$
$$३ \times १००० = ३ \times १०००$$
यामुळें,
$$१८३४ + २७९९ = ४ \times १००० + ६ \times १०० + ३ \times १० + ३$$
$$= ४६३३.$$

३१. सगळे पक्ष तशाच रितीनें केले पाहिजेत, परंतु तितक्या लांब विस्तारानें करूं नये. हें करण्यासाठीं मूळ अंकांची बेरीज कशी करावी हें समजलें पाहिजे. हें तर केवळ स्मरणानें करितां येईल; आ-

णि स्मरणाचे साहाय्याकरितां शिकणारानें आपल्या कामासाठीं हें पुढील कोष्टक तीन चार वेळा पुनःपुनः करावे;

०	१	२	३	४	५	६	७	८	९
१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०
२	३	४	५	६	७	८	९	१०	११
३	४	५	६	७	८	९	१०	११	१२
४	५	६	७	८	९	१०	११	१२	१३
५	६	७	८	९	१०	११	१२	१३	१४
६	७	८	९	१०	११	१२	१३	१४	१५
७	८	९	१०	११	१२	१३	१४	१५	१६
८	९	१०	११	१२	१३	१४	१५	१६	१७
९	१०	११	१२	१३	१४	१५	१६	१७	१८

कोष्टकाचा उपयोग या पुढीलप्रमाणें करितात; मनांत आण कीं ८ आणि ७ यांची बेरीज करावयाची आहे. डाव्येकडचे उभ्ये ओळींत त्यांतून कोणताहि एक अंक शोधून काढ, जसें ८; आणि वरचे आडव्ये ओळींत ७ पाहा: ८ चे ओळींत ७ याखालीं १५ दिसतात, ती या दोन अंकांची बेरीज आहे.

३२. प्रत्येक नवांपेक्षां कमी असे कोणते दोन अंक घेऊन, त्यांची बेरीज सहज सांगतां येईल इतके जेव्हां वरचे कोष्टक पाठ होतील, तेव्हां भलते कोणते दोन अंक, एक नवांहून अधिक आणि दुसरा नवांहून कमी, असे घेऊन त्यांची गिळवणी आणि वजाबाकी करण्यांचा अभ्यास करावा. या पुढीलप्रमाणें पुष्कळ वाक्यें लिहावीं, तेणेंकरून मिळवणीचा आणि (२३) कलमांतील चिन्हें कामांत आणण्याचा अभ्यास होईल.

१२+६=१८   २२+६=२८   १९+८=२७
५४+९=६३   ५६+७=६३   २२+८=३०
१००−९=९१   २७−८=१९   ४४−६=३८ इत्यादि.

३३. वर लिहिलेलीं दोन कलमें पुरतेपणीं मनांत ठसलीं, तर या

पुढील कृतीप्रमाणें, भलत्या कोणत्याहि अंकांची बेरीज करण्याचें सामर्थ्य येईल, ही रीति (२९) व्या कलमांत लिहिल्याप्रमाणें आहे.

पहिली रीति. अंकांस एकाखालीं एक मांड, असें कीं एकं खालीं एकं, आणि दहं खालीं दहं, इत्यादि येतील.

दुसरी रीति. सर्व अंकांचे एकं मिळीव, आणि असें केल्याने जो सर्व अंक होईल, त्याचे एकं आणि दहं असे दोन विभाग कर. जसें, जर तो अंक ८५ आहे, तर त्याचे ८ दहं आणि ५ एकं असे दोन विभाग कर; जर तो अंक १३६ असेल, तर त्याचे १३ दहं आणि ६ एकं असे विभाग कर, (२०) कलमाप्रमाणें.

तिसरी रीति. या आलेल्या अंकाचे एकं दुसऱ्या अंकांचे एकं खालीं मांड, आणि दहंचा अंक ध्यान्यांत ठेव.

चवथी रीति. दहंचे ओळींतील सर्व अंकांची बेरीज घे, आणि तिसऱ्ये रितींत जे दहं ध्यानांत ठेवण्यास सांगीतले, तेहि त्यांशीं मिळीव, नंतर ह्या दहंचे बेरिजेचे दहं, आणि शतं, असे दोन विभाग कर. जसें, आलेले अंक ३३५ दहं असतील, तर त्यांचे ३३ शतं आणि ५ दहं असे दोन विभाग कर.

पांचवी रीति. दशकांचे आलेले अंक दशकांखालीं मांड, आणि शतंचे अंक ध्यानांत ठेव.

साहावी रीति. प्रत्येक ओळीस असें करीत पुढें चाल, आणि शेवटील ओळीस आल्यावर, आलेल्या अंकाचे दोन भाग न करितां, त्यास दुसऱ्या सर्व अंकांचे पूर्वी मांड.

उदाहरण. या पुढील अंकांची बेरीज काय आहे?

१८०५ + ३६ + १९७२७ + ३ + १४७४ + २००८

१८०५	एकंचे ओळीची बेरीज, अथवा ८ + ४ + ३ + ७ + ६
३६	+५, हे ३३ आहेत, ह्मणजे ३ दहं आणि ३ एकं आहेत.
१९७२७	ते ३ एकंचे स्थळीं मांड, आणि एकंचे बेरिजेपासून आ-
३	लेले ३ दहं हातचे घेऊन, दहंचे ओळीची बेरीज घे-
१४७४	ह्मणजे, ३ + ०+७+ २ + ३ + ०, हे १५ दशक आहे-
२००८	त; ह्मणजे १ शतं आणि ५ दशकं आहेत. हे ५ दश-
२५०५३	काचे स्थळीं मांड, आणि दहंचे ओळीचे बेरिजेपासून

आलेला १ शतं हातचा घेऊन, शतंचे ओळीची बेरीज घे; ह्मणजे,

० शतं आहेत. हे ० शतंचे स्थळीं मांड, कीं कीं तसें न केलें, तर दुसरा अंक सहस्राचा ठिकाणीं घेण्याचा तो न घेतां, शतंचे ठिकाणीं घेतला जाईल, आणि शतंचे ओळीचे बेरिजेपासून आलेले २ सहस्र हातचे घेऊन, सहस्राचे ओळीची बेरीज घे; ह्मणजे, २ + २ + १ + ९ + १, हे १५ सहस्र आहेत, अथवा १ दशसहस्र आणि ५ सहस्र आहेत. हे ५ सहस्रांचे ओळींत मांड, आणि सहस्राचे ओळीचे बेरिजेपासून आलेला १ दशसहस्र, हातचा घेऊन दशसहस्रांचे ओळीची बेरीज घे; ह्मणजे, १ + १, अथवा २ हे दशसहस्र आहेत. हे दोन, दशसहस्रांचे ओळीखालीं मांड, ह्मणजे कृति पुरी होईल.

३४. मिळवणीचा अभ्यासासाठीं, या पुढील कोष्टकाविषयीं जी गोष्ट सांगतों, ती खरी आहे असें खात्रीस येईल. प्रत्येक आडव्ये, किंवा उभ्ये, किंवा कोंपऱ्यापासून कोंपऱ्यांतचे ओळींत जे अंक लिहिले आहेत, त्यांस एकत्र केले असतां, त्यांची बेरीज २४१५६ इतकी होईल.

२०१६	४२१२	१६५६	३८५२	१२९६	३४९२	९३६	३१३२	५७६	२७७२	२१६
२५२	२०५२	४२४८	१६९२	३८८८	१३३२	३५२८	९७२	३१६८	६१२	२४१२
२४४८	२८८	२०८८	४२८४	१७२८	३९२४	१३६८	३५६४	१००८	२८०८	६४८
६८४	२४८४	३२४	२१२४	४३२०	१७६४	३९६०	१४०४	३२०४	१०४४	२८४४
२८८०	७२०	२५२०	३६०	२१६०	४३५६	१८००	३६००	१४४०	३२४०	१०८०
१११६	२९१६	७५६	२५५६	३९६	२१९६	३९९६	१८३६	३६३६	१४७६	३२७६
३३१२	११५२	२९५२	७९२	२५९२	३६	२२३२	४०३२	१८७२	३६७२	१५१२
१५४८	३३४८	११८८	२९८८	४३२	२६२८	७२	२२६८	४०६८	१९०८	३७०८
३७४४	१५८४	३३८४	८२८	३०२४	४६८	२६६४	१०८	२३०४	४१०४	१९४४
१९८०	३७८०	१२२४	३४२०	८६४	३०६०	५०४	२७००	१४४	२३४०	४१४०
४१७६	१६२०	३८१६	१२६०	३४५६	९००	३०९६	५४०	२७३६	१८०	२३७६

जर एकांतून कांहीं भाग घेऊन, तितकाच भाग दुसऱ्याशीं मिळवून, त्या दोहोंची बेरीज केली, तर त्या दोन अंकांचे बेरिजेमध्यें कांहीं फेर पडणार नाहीं. जर दोन टोपल्यांत खड्यांचे समुदाय असले, आणि एकींतून कित्येक खडे काढून दुसरींत टाकले, तर दोन्ही टोपल्या मिळून खड्यांचे समुदायांत कांहीं फेर पडणार नाहीं. जसें, १५ + ७ आणि १२ + १० हे एकच आहेत, कां कीं १२ हे १५ पेक्षां ३ नीं कमी आहेत, आणि १० हे ७ पेक्षां ३ नीं अधिक आहेत. (२९) कलमांत जी कृति केली तिला आधार हें मूळ कारण आहे.

३६. (२४) कलमाप्रमाणें, दोन अंकांचे जागीं अ आणि ब घे. ते अंक काय आहेत, हें समजेपावेतों त्यांची बेरीज सांगण्यास अशक्य. परंतु सद्यः तर त्यांची बेरीज दाखविण्यासाठीं अ + ब घे. अ आणि ब यांतून अला क मिळविला, आणि लागलाच बतून क वजा केला, तर बीजगणिताचे भाषेप्रमाणें, अ आणि ब यांचे बेरिजेंत कांहीं फेर पडत नाहीं, असें ह्मटल्याने, हें पुढील समीकरण होतें;

(अ + क) + (ब − क) = अ + ब;

हें समीकरण कुंडलीवांचून या पुढीलप्रमाणें मांडतां येईल, जसें,

अ + क + ब − क = अ + ब.

कां कीं विचार केला असतां या दोन्ही समीकरणाचा अर्थ एकच आहे, असें दिसण्यांत येईल.

३७. जर दोन, तीन किंवा अधिक वेळा अ घेतला, तर त्यास बीजगणितांत २अ, ३अ, ४अ इत्यादि रूपाने मांडितात. या पदांतून कोणत्येहि दोन पदांची बेरीज, त्यांचेमध्यें + हें चिन्ह मांडल्यापेक्षां ती अधिक संक्षेपरूपाने दाखवितां येईल; कां कीं अ कोणत्या अंकाचे स्थळीं घेतला आहे, तें जरी कळलें नाहीं, तरी तो कसाहि असल्याने, २अ + २अ = ४अ, ३अ + २अ = ५अ, ४अ + ९अ = १३अ असें होतें; आणि सामान्यतः जर म वेळा अ घेऊन, त्याशीं न वेळा अ मिळविला, तर उत्तर म + न वेळा अ घेतला असें होईल, अथवा

म अ + न अ = (म + न)अ.

३८. कुंडलीविषयीं येथें कांहीं सांगीतलें पाहिजे. तिचा अर्थ हाच, कीं तींत जी पद्धती असेल, तिचेजागीं एकच अक्षर आहे असें जाणून,

पअ याचा अर्थ हाच कीं प वेळा अ घेतला आहे, आणि (म + न)अ याचा अर्थ हाच कीं म + न वेळा अ घेतला आहे. यामुळें (म + न)अ आणि म + नअ हीं दोन्हीं भिन्न आहेत, कां कीं म + नअ याचा अर्थ हाच कीं न वेळा अ घेऊन, नंतर त्याशीं म मिळविला आहे. जसें, (३+४)×२ हे ७×२ अथवा १४ आहेत; परंतु ३+४×२ हे ३+८, अथवा ११ आहेत.

३९. एक अंक दुसऱ्यांतून वजा करून जो अंक राहतो, त्यास **बाकी** किंवा **शेष** ह्मणतात. बाकी काढण्याचे रितीस **वजाबाकी** ह्मणतात. जो अंक वजा करायाचा आहे, तो दोन अंकांतून अर्थात् लहान अंक आहे.

४०. वजाबाकीचे कृतीचा आश्रय या पुढील दोन मूळ कारणावर आहे.

पहिलें. दोन अंकांची वजाबाकी करायाची असेल, आणि पहिल्या अंकाला कांहीं अंक मिळवून, तितकाच जर दुसऱ्याशीं मिळविला; अथवा पहिल्या अंकांतुन कांहीं अंक वजा करून, तितकाच जर दुसऱ्यांतून वजा केला, तर त्या दोन अंकांचे वजाबाकीमध्यें कांहीं फेर पडणार नाहीं. दोन टोपल्या खड्यांनीं भरलेल्या आहेत, आणि दुसरीपेक्षां पहिल्ये टोपलींत शंभर खडे अधिक आहेत, अशी कल्पना कर. जर प्रत्येक टोपलीमध्यें ५० खडे अधिक टाकले, किंवा प्रत्येक टोपलींतून ५० खडे काढिले, तरी दुसऱ्ये टोपलीपेक्षां पहिल्ये टोपलींत १०० खडे अधिक होतील. यामुळें भलत्या दोन अंकांची वजाबाकी काढतेसमयीं जर सोईस पडेल, तर दोनही अंकांस भलता कोणताहि अंक मिळवितां येईल, कां कीं, जरी असें केल्याने त्या अंकांत भेद होतो, तथापि त्यांचे वजाबाकीमध्यें कांहीं भेद होत नाहीं.

दुसरें. ६ हे ४ पेक्षां २ नीं अधिक आहेत,
आणि ३ हे २ पेक्षां १ ने अधिक आहेत,
आणि १२ हे ५ पेक्षां ७ नीं अधिक आहेत,

यामुळें ६, ३, आणि १२ हे सर्व, अथवा २१ हे, ४, २, आणि ५ हे सर्व, अथवा ११, यांपेक्षां २, १, आणि ७ हे सर्व, अथवा १०, इतक्यांनीं अधिक आहेत; कोणत्याहि दुसऱ्या अंकांविषयीं ही गोष्ट खरी आहे.

४१. अ, ब, आणि क, असे तीन अंक असतील, आणि जर ब पेक्षां अ मोठा असेल, तर (४०) या कलमांतील पहिल्यामूळ कारणावरून पुढील-प्रमाणें होतें,

(अ + क) − (ब + क) = अ − ब.

पुनः, अ आणि ब यांपेक्षां जर क कमी असेल, तर

(अ − क) − (ब − क) = अ − ब.

(३६) कलमाप्रमाणें या उदाहरणांत कुंडली काढवत नाहीं. ह्मणजे प − (क − र) आणि प − क − र हीं दोन्हीं सारिखीं नाहींत. कां कीं, पहिलींत, क आणि र यांची बाकी, पतून वजा केली आहे; परंतु दुसरींत पतून पहिल्याने क आणि दुसऱ्याने र असे वजा केले आहेत, ह्मणून क आणि र अथवा क + र, वजा केले असतां वरचे सारिखेंच होतें. यामुळें प − क − र ही पद्धती प − (क + र) आहे. प − (क − र) यापासून कुंडली कशी काढावी कीं उत्तराचे किमतींत कांहीं फेर पडणार नाहीं, हें दाखवायासाठीं, पुढील सोपें उदाहरण घे, ह्मणजे १२ − (८ − ५). जर १२ तून ८ वजा केले, किंवा १२ − ८, असें केलें तर अधिक वजा केले असें होईल; कां कीं केवळ ८ वजा करायाचे नाहींत, परंतु ८ हे ५ नीं कमी करून बाकी मात्र वजा करायाची आहे. यामुळें १२ − ८ असें केल्याने ५ अधिक वजा होतात. यामुळें त्यांस नीट करायासाठीं उत्तरास ५ मिळविले पाहिजेत, ह्मणून, १२ − (८ − ५) यांची किंमत १२ − ८ + ५ आहे. सर्व पक्षांस ही तर्करीति लागू होये, आणि यामुळें हें पुढील प्रमाणें होतें.

प − (क + र) = प − क − र.
प − (क − र) = प − क + र.

तशेच तर्क रितीने,

अ − (ब + क − ड − इ) = अ − ब − क + ड + इ.
२अ + ३ब − (अ − २ब) = २अ + ३ब − अ + २ब
= अ + ५ब.
४क्ष + य − (१७क्ष − ९य) = ४क्ष + य − १७क्ष + ९य
= १०य − १३क्ष.

४२. ५७७६२ आणि २४६३१ या अंकांची वजाबाकी करण्याची इच्छा आहे. (२९) या कलमाप्रमाणें या संख्यांचे तुकडे कर;

३४६३१ हे ३ दशसहस्र, ४ सहस्र, ६ शत, ३ दशक, १ एक आहेत.

आतां २ एकं हे   १ एकंपेक्षां   १ एकंनें अधिक आहेत.

६ दशक हे   ३ दशकांपेक्षां   ३ दशकांनीं अधिक आहेत.

७ शतक हे   ६ शतकांपेक्षां   १ शतकानें अधिक आहेत.

७ सहस्र हे   ४ सहस्रांपेक्षां   ३ सहस्रांनीं अधिक आहेत.

५ दशसहस्र हे ३ दशसहस्रांपेक्षां २ दशसहस्रांनीं अधिक आहेत.

यामुळें (४० कलमाचे दुसऱ्या मूळ कारणाप्रमाणें) पहिल्ये ओळीचा सर्व अंकांचा एकंदर, दुसऱ्ये ओळीचे सर्व अंकांचे एकंदरीपेक्षां, तिसऱ्ये ओळीचे सर्व अंकांचे एकंदरीनें अधिक आहे, ह्मणजे यांणीं

२ दशसहस्र, ३ सहस्र, १ शतक, ३ दशक आणि १ एकं, ह्मणजे ते २३१३१ आहेत. यामुळें ५७७६२ आणि ३४६३१ यांची वजाबाकी २३१३१ आहे, अथवा ५७७६२ – ३४६३१=२३१३१.

४३. अशी कल्पना कर, कीं ६१२७४ आणि ३९६२८ यांची वजाबाकी करायाची आहे. हे दोन अंक विस्तारानें लिहीं, ह्मणजे

६१२७४ यांत ६ दशसहस्र,१ सहस्र, २ शतक, ७ दशक आणि ४ एकं आहेत.

३९६२८ यांत ३ दशसहस्र, ९ सहस्र, ६ शतक, २ दशक आणि ८ एकं आहेत.

वरचे कलमाप्रमाणें करूं लागलें, तर लागलीच अडचण पडती, कां कीं ८ हे, ४ पेक्षां अधिक आहेत, ह्मणून त्यांतून वजा होत नाहीं. परंतु (४०) व्या कलमावरून असें दिसतें कीं जर दोन अंकांची वजाबाकी करायाची असेल, आणि त्या दोहोंलाहि एकसारिखा अंक मिळविला, तर त्यांचे वजाबाकींत फेर पडणार नाहीं. पहिल्या अंकास दहा मिळीव, ह्मणजे ४ एकंचे जागीं १४ एकं घे, आणि दुसऱ्या अंकाला दहा मिळीव, परंतु एकंचा अंकाला दहा मिळविण्याचे जागीं, दहं या अंकाला एक मिळीव ह्मणजे सारिखेंच होईल. ह्मणजे ते दोन अंक या पुढीलप्रमाणें मांडले जातील.

६ दशसहस्र, १ सहस्र, २ शतक, ७ दशक आणि **१४ एकं**.†

३ दशसहस्र, ९ सहस्र, ६ शतक, ३ **दशक** आणि ८ एकं.

† जा अंकास फिरविलें आहे त्यास मोठ्या अक्षरांनीं लिहिलें आहे.

ओळीचे एकं आणि दहं यांतून वजा करितां येतील, परंतु खालचे ओळीचे शतक, वरचे ओळीचे शतकांतून वजा केले जात नाहींत. यासाठीं, त्या दोहों अंकांस एक सहस्र अथवा १० शतक मिळीव, ह्मणजे असें केल्याने त्यांचे वजाबाकींत कांहीं फेर पडणार नाहीं, आणि स्मरणांत ठेव कीं वरचे ओळीचे शतक १० नीं अधिक कर, आणि खालचे ओळीचे सहस्र, एक याने अधिक कर, ह्मणजे हे दोन सारखेच होतील. आणि खालचे ओळीचे सहस्र, वरचा ओळीचा सहस्रांत वजा होत नाहीं, यामुळें त्या दोहों अंकांस १ दशसहस्र अथवा १० सहस्र मिळीव, आणि वरचे ओळीचे सहस्रास १० नीं अधिक कर, आणि खालचे ओळीचे दशसहस्रास १ याने अधिक कर, ह्मणजे हे दोनीं सारिखेच होतील; असें केल्यानें शेवटीं जे अंक निघतात, ते या पुढीलप्रमाणें होतील,

६दशसहस्र, ११ सहस्र, १२ शतक, ७ दशक, आणि १४ एकं.

४दशसहस्र, १० सहस्र, ६ शतक, ३ दशक, आणि ८ एकं.

हे दोन अंक आणि या कलमाचे आरंभीं सांगितले अंक सारिखेच नाहींत खरे, परंतु (४०) कलमाप्रमाणें त्यांची वजाबाकी सारिखीच आहे. (४२) कलमाचे रितीप्रमाणें या शेवटील सांगितल्या अंकांशीं कृति कर, ह्मणजे त्यांची वजाबाकी या पुढीलप्रमाणें निघेल,

२ दशसहस्र, १ सहस्र, ६ शतक, ४ दशक, आणि ६ एकं आहेत, ह्मणजे हे २१६४६ आहेत.

४४. यावरून वजाबाकी करण्याचा ह्या पुढील रिती निघतात.

पहिली. जो अंक वजा करायाचा आहे, त्यास दुसऱ्याचे खालीं असा मांड कीं, एकंखालीं एकं, दहंखालीं दहं, इत्यादि येतील.

दुसरी. जर खालचे ओळीचा प्रत्येक अंक, वरचे ओळीचे त्याच अंकांतून वजा करितां येतो तर कर. आणि जर तसें करितां येत नाहीं, तर वरचे अंकास दहा मिळवून, त्यांतून खालचा अंक वजा कर; परंतु स्मरण ठेव, कीं या पक्षांत त्यास वरचे ओळीचे अंकांतून वजा करण्याचे पूर्वीं, खालचे ओळीचा जवळचा अंकास एकाने नेहमी वाढविला पाहिजे.

४५. जर खालचे ओळीचीं अंकस्थळें, वरचे ओळीचे अंकस्थळांचे बरोबर नसतील, तर तीं अंकस्थळें बरोबर होतील, इतकीं शून्यें खालचे

८१८ ह्या दोनहि संख्या सारिख्याच आहेत, कां कीं त्यांतून पहिली-चा अर्थ हाच आहे,

० दशसहस्र, ० सहस्र, ८ शतक, १ दशक आणि ८ एकं; पहिले दोन अंक शून्य आहेत, आणि बाकी

८ शतक, १ दशक आणि ८ एकं, अथवा ८१८ आहेत. या दोहोंतून दुसऱ्या अंकामध्यें सहस्र आणि दशसहस्र नाहींत, या ह्मणण्याशिवाय त्या दोहोंत दुसरा कांहीं फेर नाहीं, आणि त्यांत सहस्र आणि दशसहस्र नाहींत, हें सांगीतल्यावांचून ध्यानांत येतें. कदाचित् कोणी असें विचारील, कीं शून्य अंकांचेमध्यें, किंवा त्यांचे उजव्ये बाजूस मांडिलें असतां, जसें २८००७ आणि ३९७००, यांस ही गोष्ट कां लागू होत नाहीं? परंतु स्मरणांत ठेविलें पाहिजे, कीं पहिल्या अंकांतील दोन शून्यें नसलीं तर, जे ८ आहेत ते ८ सहस्रांचे जागीं ८ दशक आहेत असें होईल; आणि दुसऱ्या अंकांत दोन शून्यें नसलीं, तर ७ आहेत ते ७ शतकांचे जागीं ७ एकं आहेत असें होईल.

४६. उदाहरणें.

३७०८२९१६४००३०१७४ } यांची वजाबाकी काय?
३०८१३६४९२७६१८८ }
३६७७४७७९९०७५३९८६ बाकी.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

पहिलें. १८३३७+१४९२६३२००−६४७२९०२ उत्तर काय आहे?
उत्तर १४२८०८६३५.

१०००−४६४+३२७९−६४६ उत्तर काय आहे? उत्तर ३१६९.

दुसरें. ३३−२+१०००३७ यांतून ६४+७६+१४४−१८ हे वजा कर. उत्तर ९९८०२.

तिसरें. जर उदाहरणांतील वरचे ओळींतल्या डाव्येकडील पहिल्या स्थळाशिवाय बाकीचे सर्व अंकस्थळीं शून्यें असतील, ह्मणजे ही पुढील वजाबाकी करायाची आहे, तर वजाबाकी करायाकरितां कोणती अधिक संक्षेप रीति आहे?

१००००००० − २७३१६३४.

चवथें. १८३६२+२४६९ आणि १८३६२−२४६९, यांची किंमत काढ, दुसरें उत्तर पहिल्या उत्तराशीं मिळीव, नंतर त्यांतून १८३६२ वजा कर; पुनः पहिल्या उत्तरांतून दुसरें उत्तर वजा कर, नंतर त्यांतून २४६९ वजा कर. उत्तर १८३६२ आणि २४६९.

पांचवें. अ, ब, क, आणि ड, या क्रमाने एकच ओळींत चार स्थळें आहेत. अपासून डपावेतों १४६३ मैल; अपासून कपावेतों ७२८ मैल; आणि बपासून ड पावेतों १३१७ मैल आहेत. तर अपासून ब पावेतों, बपासून कपावेतों, आणि कपासून डपर्यंत हीं वेगवेगळालीं अंतरें किती किती आहेत?

उत्तर अपासून बपावेतों १४६, बपासून कपावेतों ५८२, आणि कपासून डपर्यंत ७३५ मैल अंतर आहे.

साहावें. या पुढील कोष्टकांत अतून ब वजा कर, आणि त्या बाकींतून ब पुनः वजा कर, आणि याप्रमाणें पुढें पुनः पुनः ब वेगळ्येवेगळ्ये बाकींतून, जोंपर्यंत वजा केला जात नाहीं तोंपर्यंत कर. अ पासून ब किती वेळा वजा केला जातो, आणि शेवटील बाकी काय आहे हें काढ.

अ	ब	वेळांक	बाकी
२३६०४	९९९९	२	३६०६
२०९९६१	३७१७३	५	२४०९६
७४७१२	६७९२	११	०
४८०२४६९	६५४३२१	७	२२२२२२
१८८४९७४७	३१४१५९२	६	१९५
९८७६५४३२१	१२३४५६७८९	८	९

गुणाकार.

४७. अंकगणितांतील सर्व प्रश्नांस मिळवणी आणि वजाबाकी लागती, याशिवाय दुसरें कांहीं लागत नाहीं असें वर सांगीतलें आहे. तथापि मागील भागांत जा रिती सांगीतल्या आहेत, त्यांशिवाय कोणत्याहि दुसऱ्या रिती कधींहि कामांत आणू नये, असें सांगण्याचा अभिप्राय नाहीं, परंतु मागील रितींपासून जें फळ उत्पन्न होतें, तेंच फळ संक्षेप रितीनें काढण्याचा मार्ग दुसऱ्या रिती दाखवितात असा अभिप्राय आहे. आणि अशा कल्पनेप्रमाणें जें कांहीं खड्यांनीं किंवा चकत्यांनीं होतें, तेंच करण्याचा संक्षिप्त आणि सोपा मार्ग दाखविणाऱ्या केवळ वरच्या दोन रिती आहेत.

४८. पांच सत्रांची बेरीज जाणायाची इच्छा आहे, अथवा हा पुढील प्रश्न करितों कीं, खड्यांचा पांच राशी आहेत, आणि प्रत्येक राशींत सत्रा खडे आहेत; तेव्हां ते सर्व मिळून किती आहेत? एकाखालीं एक असे सत्रा पांच वेळा मांड आणि बेरीज घे, एणेंकरून ८५ होतात.

१७	या पक्षांत ८५ यांस ५ आणि १७ यांचा **गुणाकार** ह्मणतात,
१७	आणि हा गुणाकार करण्याचे कृतीलाहि **गुणाकार** ह्मणतात,
१७	यापासून तर भलत्या कांहीं सारिख्या परिमाणांची बेरीज नि-
१७	घती दुसरें कांहीं होत नाहीं. या उदाहरणांत १७ यांस
१७	**गुण्य** ह्मणतात, आणि ५ यांस **गुणक** ह्मणतात.
८५	

४९. यापेक्षां जर अवघड प्रश्न नसते, तर वर केलेल्ये रितीपेक्षां दुसऱ्ये कांहीं संक्षेप रितीचें प्रयोजन पडलें नसतें. परंतु जर खड्यांचा १३६७ राशी असतील, आणि प्रत्येक राशींत ४२९ खडे असतील, तर त्यांची एकंदर संख्या ४२९ यांचा १३६७ वेळा आहे, अथवा ४२९ गुणिले १३६७ इतक्याबरोबर आहे. वरचे रितीप्रमाणें केलें असतां ४२९ यांस एकाखालीं एक १३६७ वेळा मांडावे लागतील, आणि नंतर मोठी लांब मिळवणी करावी लागेल. ही खटपट चुकवायासाठीं त्यापेक्षां संक्षेप रीति अगत्य असावी, ती रीति आतां पुढें सांगतों.

५०. या पुढील कोष्टकावरून,† १० वेळा १० एथपावेतों तरी सर्व अंकांचे गुणाकारांशीं शिकणारानें पहिल्यानें माहित व्हावें, आणि तो कोष्टक त्याणें पाठ करावा.

१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०	११	१२
२	४	६	८	१०	१२	१४	१६	१८	२०	२२	२४
३	६	९	१२	१५	१८	२१	२४	२७	३०	३३	३६
४	८	१२	१६	२०	२४	२८	३२	३६	४०	४४	४८
५	१०	१५	२०	२५	३०	३५	४०	४५	५०	५५	६०
६	१२	१८	२४	३०	३६	४२	४८	५४	६०	६६	७२
७	१४	२१	२८	३५	४२	४९	५६	६३	७०	७७	८४
८	१६	२४	३२	४०	४८	५६	६४	७२	८०	८८	९६
९	१८	२७	३६	४५	५४	६३	७२	८१	९०	९९	१०८
१०	२०	३०	४०	५०	६०	७०	८०	९०	१००	११०	१२०
११	२२	३३	४४	५५	६६	७७	८८	९९	११०	१२१	१३२
१२	२४	३६	४८	६०	७२	८४	९६	१०८	१२०	१३२	१४४

७ वेळा ६ हे किती होतात, हें जर या कोष्टकांतून जाणायाची इच्छा असेल, तर त्यांतून कोणताहि अंक, जसें ६ हा डाव्येकडचे पहिल्ये

† १ पासून १२ अंकपावेतों फाडे बहुतकरून पाठ करण्याची चाल आहे; यास्तव वरचा कोष्टक १२ वेळा १२ पर्यंत रचिला आहे.

वर ७ हा अंक आहे तेथें थांब, त्या जागीं ४२ हा अंक सांपडतो, आणि तो ७ आणि ६ यांचा गुणाकार आहे.

५१. ६ वेळा ७, अथवा ७ वेळा ६, यांतून कोणताहि पक्ष या रितीनें करितां येईल, आणि या दोहोंपक्षीं उत्तर ४२ येईल. ह्मणजे, सहा सात आणि सात सहा यांचा गुणाकार सारिखाच आहे. हें या पुढीलप्रमाणें दाखवितां येतें; सात खडे एका आडव्ये ओळींत मांड, आणि तशाच एकाखालीं एक अशा सर्व मिळून सहा ओळी मांड. वरपासून खालीं पावेतों सर्व ओळी मोजिल्या, तर सर्वांत खड्यांची संख्या ६ वेळा ७, किंवा सहा सात आहेत; परंतु बाजूकडून ओळी मोजिल्या, तर असें दिसतें कीं सात ओळी आहेत, आणि प्रत्येक ओळींत सहा आहेत, ह्मणून सर्वांत खड्यांची संख्या ७ वेळा ६ अथवा सात सहा आहेत. आणि या दोहोंतून कशेहि तऱ्हेनें मोजिल्या, तरी सर्व संख्या ४२ होती. हीच रीति भलत्ये कोणत्येहि दोन अंकांस लावितां येईल. (२३) कलमांतील चिन्हें कामांत आणिलीं, तर असें ह्मणावें लागेल कीं $७\times६=६\times७$.

```
. . . . . . .
. . . . . . .
. . . . . . .
. . . . . . .
. . . . . . .
. . . . . . .
```

५२. जर भलतें कांहीं परिमाण कांहींवेळा घेणें असेल, तर त्या परिमाणाचा प्रत्येक भाग तितक्ये वेळा घेतल्यानें कार्य होईल. जसें धान्याचा एका पोत्यांतील प्रत्येक मणाचा ठिकाणीं पन्नास मण याप्रमाणें भरलें असतां, तें सर्व धान्य पन्नासपट वाढेल. कोणत्येहि मुलुखांतील प्रत्येक बिघा, किंवा प्रत्येक परगणा दुप्पट केला असतां, तो मुलुख दुप्पट होईल. जरी ही गोष्ट सरळ दिसत्ये, तरी ती सांगीतली पाहिजे, कां कीं ही गोष्ट गुणाकाराचे रितीचा आश्रयरूप मूळकारणांतून एक कारण आहे.

५३. कोणत्याहि अंकानें गुणायाचें असेल, तर त्या अंकाचे हवे तेवढे भाग करून, त्या प्रत्येक भागानें वेगवेगळे गुणून, त्या गुणाकारांची बेरीज घ्यावी. उदाहरण, ४ आणि २ मिळून ६ होतात. तर ७ यांस ६नीं गुणायासाठीं, पहिल्यानें ७ यांस ४ नीं गूण, नंतर ७ यांस २ नीं गूण, त्या दोन गुणाकारांची बेरीज घे, ह्मणजे इच्छिला गुणाकार होईल. असें केल्यानें ४२ होतात, तो ७ आणि ६ यांचा गुणाकार आहे. पुनः,

३२ आणि २५ मिळून ५७ होतात, ह्मणून ५७ वेळा ५० हे ३२ वेळा ५०, आणि २५ वेळा ५०, या दोन गुणाकारांचे बेरिजेबरोबर आहेत, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. जर चिन्हें कामांत आणिलीं, तर वरचीं दोन उदाहरणें या पुढीलप्रमाणें मांडितां येतील;

७ × ६ = ७ × ४ + ७ × २.

५० × ५७ = ५० × ३२ + ५० × २५.

५४. मागील दोन कलमांचीं मूळ कारणें या पुढीलप्रमाणें दाखवितां येतील; जर, क्ष, य, आणि ज्ञ हे मिळून अचे बरोबर असतील, तर मक्ष, मय, आणि मज्ञ, मिळून मअचे बरोबर होतील; अथवा,

जर अ = क्ष + य + ज्ञ.

तर मअ = मक्ष + मय + मज्ञ.

अथवा, म (क्ष+य+ज्ञ) = मक्ष + मय + मज्ञ.

क्ष, य, आणि ज्ञ हे मिळून अ होतो त्याबदल, जर क्ष + य – ज्ञ, क्ष – य + ज्ञ, क्ष – य – ज्ञ, इत्यादि अशा कित्येक मिळवण्या आणि वजाबाक्या मिळून जर अ होईल, तर वरप्रमाणें फळ उत्पन्न होईल. यांतून पहिली रकम घे; ह्मणजे,

जर अ = क्ष + य – ज्ञ.

तर अम = मक्ष + मय – मज्ञ.

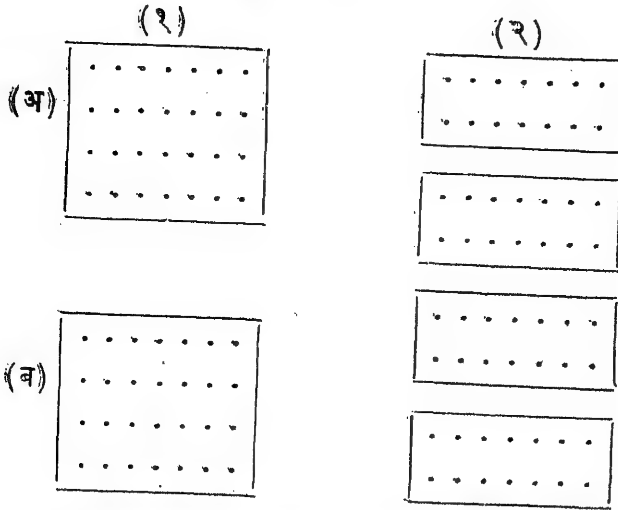
कां, जर अ हा क्ष + य यांचे बरोबर असला, तर मअ हा मक्ष + मय यांचे बरोबर होईल. परंतु क्ष + य यांत ज्ञ कमी इतका अ आहे, ह्मणून जितक्या वेळा क्ष + य घेतला, तितक्याच वेळा ज्ञ अधिक घेतला आहे; ह्मणजे, मज्ञ अधिक घेतला आहे; यामुळें, मअ हा मक्ष + मय नव्हे, परंतु मअ हा मक्ष + मय – मज्ञ आहे. या जातीचा तर्क दुसऱ्या पक्षांसाहि लागू होईल, आणि त्यापासून हीं पुढील फळें निघतील;

म(अ+ब+क–ड) = मअ+मब+मक–मड.

अ(अ–ब) = अअ – अब.	७अ(७+२ब) = ४९अ+१४अब.
ब(अ–ब) = बअ – बब.	(अअ+अ+१)अ = अअअ+अअ+अ.
२(२अ–४ब) = ६अ–१२ब.	(२अब–२क)४अबक = { १२अअबबक / –८अबकक.

५५. कोणत्याहि दोन अंकांचा गुणाकार करण्याची आणखी एक रिती आहे. ४ वेळा २ ह्मणजे ८ होतात, ह्मणून ७ वेळा ८ किती

होतात, हे आणायासाठीं ७ यांस ४ नीं गुणून, तो **गुणाकार** २ नीं गुणिला असतां उत्तर येईल. हें दाखवायासाठीं, खालचे (१) आणि (२) आकृतींप्रमाणें ७ खडे एक आडव्ये ओळींत मांड, आणि एकाखालीं एक अशा आठ ओळी मांड.



सर्व मिळून खड्यांची संख्या ८ वेळा ७, किंवा ५६ आहे. परंतु (पहिल्ये आकृतीप्रमाणें) प्रत्येक चार ओळीभोंवतीं एक काटकोनचौकोन कर, जसें (अ) आणि (ब). प्रत्येक काटकोनचौकोनांतील संख्या ४ वेळा ७, किंवा २८ आहे, आणि तसे दोन काटकोनचौकोन आहेत; यामुळें, सर्व मिळून खड्यांची संख्या २८ चे दुप्पट आहे, अथवा २८ × २, अथवा, ७ पहिल्यानें ४ नीं गुणून, नंतर तो गुणाकार २ नीं गुणिला इतकी आहे. ७ यांस ८ यांणीं गुणणें, आणि ७ यांस पहिल्यानें २ नीं गुणून, नंतर ४ नीं गुणणें हीं दोन्हीं एकच आहेत, असें दुसऱ्ये आकृतींत दाखविलें आहे. हीच रीति दुसऱ्या अंकांस लागू होईल. जसें, ८० ह्मणजे ८ वेळा १० आहेत, तर २५६ वेळां ८० हे किती होतात हें समजण्यासाठीं, पहिल्यानें २५६ यांस ८ नीं गुण, नंतर तो गुणाकार १० नीं गुणावा, ह्मणजे, इच्छिलेला गुणाकार होईल. चिन्हें कामांत आणिलीं असतां, वरचीं उदाहरणें या पुढीलप्रमाणें मांडिलीं जातील;

२५६×८० = २५६×८×१० = २५६×१०×८.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

२×३×४×५=२×४×३×५=५×४×२×३ इत्यादि हें दाखीव.

१८×१००=१८×५७+१८×४३ हें दाखीव.

५६. अब याचा अर्थ अ हा ब वेळा घेतला असा आहे, आणि अबक याचा अर्थ अ, ब वेळा घेऊन तो गुणाकार क वेळा घेतला असा आहे; असें समजून (५१) आणि (५५) कलमें या पुढीलप्रमाणें दाखवितां येतील.

अब = बअ.

अबक = अकब = बकअ = बअक, इत्यादि.

अबक = अ×(बक) = ब×(कअ) = क×(अब).

अला ब, क, आणि ड, यांणीं एकामागें एक गुणिलें असतां, अथवा अला बकड यांणीं एकदांच गुणिलें असतां सारिखाच गुणाकार होतो असें जर ह्मटलें, तर या पुढीलप्रमाणें लिहिलें पाहिजे;

अ×ब×क×ड = अ×बकड.

सारांश कीं जर कांहीं अंक परस्पर गुणायाचे असतील, तर त्यांतील दोन किंवा अधिक अंकांचे गुणाकार करून, ते गुणाकार त्या अंकांचे जागीं मांडितां येतील; जसें,

अबकडइफ हा गुणाकार, हीं पुढील पदें परस्पर गुणिल्यानें होतो,

अब	कडइ	फ
अबफ	डइ	क
अबक	डइफ	इत्यादि.

५७. १० नीं गुणायाचें असेल, तर गुण्याचे उजव्ये बाजूस एक शून्य मांडावें. जसें, १० वेळा २३५६ हे २३५६० होतात. हें दाखवायासाठीं, २३५६ ही संख्या विस्तारानें मांड, जसें,

२ हजार, ३ शतक, ५ दशक, आणि ६ एकं.

हे प्रत्येक भाग १० वेळा घे, तर (५२) व्या कलमाप्रमाणें सर्व संख्येस १० नीं गुणणें इतक्याबरोबर होईल, नंतर याप्रमाणें होईल.

हजाराचे २ दशक, शतकाचे ३ दशक, दशकाचे ५ दशक, आणि एकंमाचे ६ दशक.

हें याप्रमाणें लिहिलें पाहिजे, ह्मणजे, २३५६०, कां कीं ६ हे ६ एक नाहींत, परंतु ६ दशक आहेत, यामुळें २३५६ × १० = २३५६० आहेत.

१०० यांणीं गुणायाचें असेल, तर गुण्याचे उजव्ये बाजूस दोन शून्यें मांडावीं; १००० यांणीं गुणायाचें असेल, तर गुण्याचे उजव्ये बाजूस तीन शून्यें मांडावीं, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. ही रीति खरी आहे असें वरचे रितीप्रमाणें दाखवितां येईल. या पुढील कोष्टकावरून ही रीति सहज ध्यानांत येईल.

१३×१०=१३०   १४२×१०००=१४२०००

१३×१००=१३००   २३७००× १० =२३७०००

१३×१०००=१३०००   ३०४०×१०००=३०४००००

१३×१००००=१३००००   { १००००×१००००० =१०००००००००

५८. २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, अथवा ९ यांतून कोणत्याहि एक अंकानें गुणायाची रीति दाखवितों. यांत १ हा अंक घेतला नाहीं, कां कीं १ नें गुणणें, अथवा कांहीं एक संख्या १ वेळा घेणें, यापासून ती संख्या नुसती लिहावी असा अर्थ होतो. १३६८ यांस ८ नीं गुणायाचें आहे. पहिली संख्या विस्तारानें याप्रमाणें मांड.

१ हजार, ३ शतक, ६ दशक, आणि ८ एकं.

यांस ८ नीं गुणायासाठीं, (५०) आणि (५२) प्रमाणें या वेगळाल्या भागांस ८ नीं गुण, तर याप्रमाणें होईल,

८ हजार, २४ शतक, ४८ दशक, आणि ६४ एकं.

आतां ६४ एकं याप्रमाणें लिहितात................६४
४८ दशक.............................४८०
२४ शतक............................२४००
८ हजार............................८०००

यांची बेरीज घे, ह्मणजे ती १०९४४ आहे, ही १३६८ आणि ८ यांचा गुणाकार आहे, अथवा १३६८ × ८ = १०९४४ आहे. याप्रमाणें कांहीं थोडीं उदाहरणें केलीं असतां ही पुढील रीति ध्यानांत येईल.

५९. **पहिल्यानें.** गुण्याचे उजव्येकडील पहिल्या अंकास गुण-

दशक हातचे घे.

दुसऱ्यानें. गुण्याचा दुसऱ्या अंकास पूर्वीप्रमाणें गुण, आणि त्या गुणाकारांत पहिले हातचे दशक मिळीव; यांतील एकंचा अंक खालीं मांडून त्याचे दशक हातचे घे.

तिसऱ्यानें. याप्रमाणें शेवटचा अंकापर्यंत कर, आणि नंतर त्या अंकापासून जो गुणाकार येईल तो सगळा खालीं मांड.

चवथ्यानें. जर गुण्यांत एकादें शून्य असलें, तर ०×१=०,०×२=०, इत्यादि असें होतें हें लक्षांत धरून, त्याशीं अंकाप्रमाणें कृति कर.

६०. याच रितीनें जा अंकास शून्यें जोडिलेलीं असतात, जसें ८०००, त्याणें कोणताहि अंक गुणितां येईल. कां कीं ८००० हे ८×१००० इतक्याबरोबर आहेत, आणि यामुळें (५५) प्रमाणें पहिल्यानें ८ नीं गुणून नंतर १००० नें गुणावें, हजारानें गुणण्याची कृति (५७) प्रमाणें अंकाचे उजव्ये कडेस ३ शून्यें जोडिल्यानें पुरी होये. यावरून या पक्षाची रीति पुढील आहे, नुसत्या अंकानें गुणून, त्या अंकावर जितकीं शून्यें असतात, तीं त्या गुणाकाराचे उजव्ये बाजूस मांड.

उदाहरण.

१६७९४२३८००८७२ यांस
६०००० यांणीं गुण.
―――――――――――
१००७६५४२८०५२३२००००

६१. **अभ्यासाकरितां उदाहरणें.**

१००७३६०×७ हे किती होतात? उत्तर. ७०५१५२०.

१२३४५६७८९×९+१० आणि १२३×९+४ हें किती होतात?
उत्तर. ११११११११११ आणि ११११.

१३६×३ + १२९×४ + १४७×८+२७×३०००
उत्तर. ८३१००.

एक लश्करांमध्यें पायदळांचीं ३३ पळटणें आहेत, आणि प्रत्येक पळटणांत ८०० मनुष्यें आहेत; स्वारांचीं १४ पळटणें आहेत, त्या प्रत्येक पळटणांत ६०० मनुष्यें आहेत; आणि गोलंदाजांचीं २ पळटणें आहेत, आणि प्रत्येकांत ३०० मनुष्यें आहेत. शत्रूपाशीं पायदळांचीं ६ पळटणें अधिक आहेत, आणि त्या प्रत्येक पळटणामध्यें १०० मनुष्यें

पळटणें आहेत, त्या प्रत्येकांतील मनुष्यांची संख्या वरचे गोलंदाजांचे पळटणाप्रमाणेंच आहे. पहिले लश्करांतून स्वारांचीं दोन आणि पायदळांचें एक पळटण शत्रूकडे पळून जातात. तर शत्रूचे लश्करांत पहिल्येपेक्षां किती मनुष्यें अधिक होतील ? उत्तर. १३४००.

६२. मनांत आण कीं २३७०७ यांस ४५६७ यांणीं गुणायाचें आहे. आतां (५३) प्रमाणें ४५६७ हे ४०००,५००,६०, आणि ७ या वेगवेगळाल्ये संख्यांचे बेरजेबरोबर आहेत, तर २३७०७ यांस त्या प्रत्येकानें गुणून, त्या वेगळाल्या गुणाकारांची बेरीज घ्यावी.

आतां (५८) प्रमाणें	२३७०७×	७ =	१६५९४९
(६०) प्रमाणें	२३७०७×	६० =	१४२२४२०
	२३७०७×	५०० =	११८५३५००
	२३७०७×	४००० =	९४८२८०००
	यांची बेरीज	=	१०८२६९८६९

हा इच्छिलेला गुणाकार आहे.

प्रत्येक ओळीचा शेवटीं जीं शून्यें मांडिलीं असतात त्यांस सोडून, ओळींतील बाकीचे अंक त्यांचे त्यांचे जागीं मांडले असतांहि चालेल. शून्यें सोडल्यानंतर, दुसऱ्ये ओळीचे उजव्येकडील पहिला अंक, पहिल्ये ओळीचे उजव्येकडील पहिल्या अंकाचे एक स्थळ डाव्येकडे येतो, तिसरे ओळीचा उजव्येकडील पहिला अंक, दुसऱ्ये ओळीचे उजव्येकडील पहिल्या अंकाचे एक स्थळ डाव्येकडे येतो, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. वरचा गुणाकाराचे ओळींचा डोक्यावर गुण्य गुणक मांडून, गुणाकाराची कृति या पुढीलप्रमाणें होईल.

२३७०७
४५६७
१६५९४९
१४२२४२
११८५३५
९४८२८
१०८२६९८६९

६३. जेव्हां गुणकांत मध्यें कोठे तरीं शून्य येतें, असा एक अधिक पक्ष दाखवायाचा राहिला आहे. जा जा अंकानें गुणावयाचें, त्या अंकाचा गुणाकाराचा पहिला अंक त्याच गुणकांकाचे खालीं यावा, इतकें मात्र यापक्षांत केलें पाहिजे, असें पुढील उदाहरणावरून दिसेल. मनांत आण कीं, ३६५ यांस १०१००१ यांणीं

१०००००,१०००, आणि १, यांची बेरीज वर सांगितलेल्ये गुणकाबरोबर आहे. तर पूर्वी सांगितल्याप्रमाणें कृति कर; ह्मणजे,

	३६५×१	=	३६५
(५७) प्रमाणें	३६५×१०००	=	३६५०००
	३६५×१०००००	=	३६५०००००
	यांची बेरीज	=	३६८६५३६५

या उदाहरणांत शून्यें सोडून गुणाकार कृति याप्रमाणें होईल;

```
     ३६५
  १०१००१
  ------
     ३६५
   ३६५
 ३६५
 --------
 ३६८६५३६५
```

६४. सर्व पक्षांत गुणाकाराची रीति यापुढीलप्रमाणें आहे.

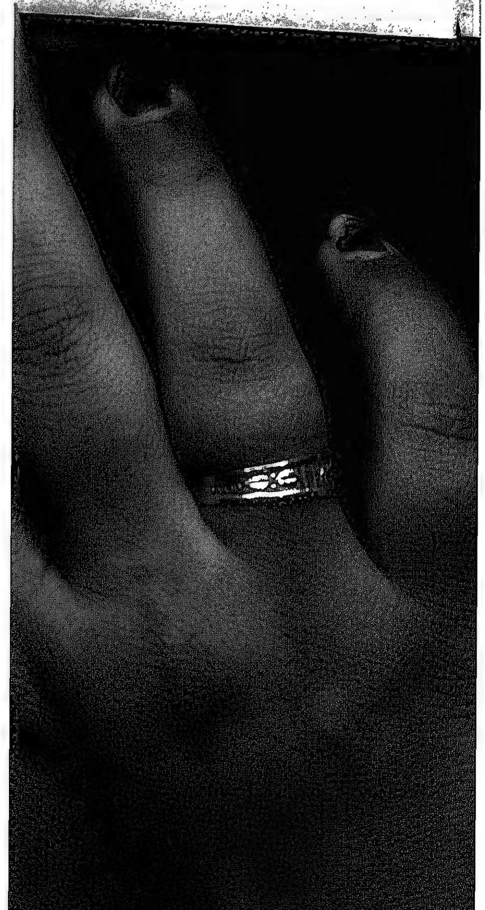
पहिल्यानें. गुण्य आणि गुणक असे मांड, कीं एकाचा एकंचा स्थळींचा अंक दुसऱ्याचा एकंखालीं, दहंचास्थळींचा अंक दुसऱ्याचा दहंखालीं, इत्यादि येतील.

दुसऱ्यानें. (५९) प्रमाणें सर्व गुण्य, गुणकाचे प्रत्येक अंकानें क्रमानें गुण, आणि अशा प्रत्येक गुणाकाराचा एकंचा स्थळींचा अंक त्याच गुणक अंकाखालीं मांड.

तिसऱ्यानें. वेगळाले गुणाकार जे दुसऱ्यानें झाले त्यांची बेरीज घे.

६५. जेव्हां गुण्याचा, किंवा गुणकाचा, किंवा दोहोंचे उजव्येकडेस शून्यें असतात, तेव्हां शून्यावांचून गुणाकार कृति कर, नंतर त्या गुणाकाराचे उजव्येबाजूस गुण्यगुणक या दोहोंत जितकीं शून्यें आहेत तितकीं मांड. उदाहरण, ३२००×१३००० किती होतात? आतां, ३२०० हे ३२×१०० आहेत, अथवा ३२ चे १०० पटी बरोबर. पुनः, ३२×१३००० हे ३२×१३ आणि त्याजवर ३ शून्यें मांडिलीं इतके आहेत, ह्मणजे ४१६ आणि त्यांचे उजव्येकडे ३ शून्यें, अथवा ४१६००० आहेत. परंतु इच्छिलेला गुणाकार यापेक्षां १०० पट अधिक असावा, ह्मणून त्यावर आणखी दोन शून्यें मांडिलीं पाहिजेत. यावरून ४१६००००० हा इच्छिलेला गुणाकार आहे, ह्मणून जितकीं गुण्य आणि गुणकांत शून्यें आहेत तितकीं यांत आहेत.

६६. कांहीं अंक त्याणें तोच वारंवार गुणिला असतां, गुणाकाराला त्या अंकाचा **घात** ह्मणतात. जसें;



६ यास ६ ची पहिला घात ह्मणतात.

६×६ यांस ....दुसरा घात ह्मणतात.

६×६×६ ....तिसरा घात ह्म०

६×६×६×६ ....चवथा घात ह्म०

इत्यादि. इत्यादि.

दुसऱ्या आणि तिसऱ्या घातास बहुतकरून **वर्ग** आणि **घन** ह्मणतात; भूमितींतील चौरस आणि घनयांशीं दुसऱ्या आणि तिसऱ्या घाताचा संबंध आहे, यासाठीं हे दोन शब्द कामांत आणिले आहेत; परंतु हीं नामें केवळ शुद्ध नाहींत. गुणाकाराचा अभ्यासासाठीं, हे पुढील घात कर.

सांगितलेल्या संख्या.	वर्ग.	घन.
९७२	९४४७८४	९१८३३००४८
१००८	१०१६०६४	१०२४१९२५१२
३१४२	९८७२१६४	३१०१८३३९२८८
३१६३	१०००४५६९	३१६४४४५१७४७
५५५५	३०८५८०२५	१७१४१६३२८८७५
६७८९	४६०९०५२१	३१२९०८५४७०६९

३६ यांचा पंचघात........ ६०४६६१७६ आहे.

५० यांचा चतुर्घात........ ६२५००००—

१०८ यांचा चतुर्घात........ १३६०४८८९६—

२७७ यांचा चतुर्घात........ ५८८७३३९४४१—

६७. अ + ब यांस क + ड यांणीं गुणायाचें आहे, ह्मणजे क + ड यांत जितके एकं आहेत, तितक्ये वेळा अ + ब घेण्याचे आहेत. परंतु (५३) प्रमाणें अ + ब हे क वेळा आणि ड वेळा घेण्याचे आहेत, अथवा इच्छिला गुणाकार (अ + ब)क + (अ + ब)ड आहे. परंतु (५२) प्रमाणें (अ + ब)क हा अक + बक आहे, आणि (अ + ब)ड हा अड + बड आहे; यावरून इच्छिलेला गुणाकार अक + बक + अड + बड आहे; अथवा,

(अ+ब)(क+ड) = अक+बक+अड+बड.

अशेच रितीनें (अ−ब)(क+ड) हे (अ−ब)क+(अ−ब)ड; अथवा,

(अ−ब)(क+ड) = अक−बक+अड−बड.

... वेळा घ, म्हणजे अक – बक होतील. हें खरें नाहीं, कां कीं अ – ब हे क – ड वेळा न घेतां क वेळा मात्र घेतले, तेव्हां ड वेळा अधिक घेतले गेले; अथवा (अ – ब)ड इतक्यानें गुणाकार अधिक झाला. यामुळें, अक – बक – (अ – ब)ड हें खरें उत्तर आहे. परंतु (अ – ब)ड हे अड – बड, यांमुळे,

(अ–ब)(क–ड) = अक–बक–(अड–बड)

अथवा (४१) प्रमाणें = अक–बक– अड+बड

या मागील तीन उदाहरणांपासून बीजगणित परिमाणांचा गुणाकार करायाची ही पुढील रीति निघते; गुण्याचें प्रत्येक पद गुणकाचें प्रत्येक पदानें गुण; जेव्हां दोनीहि पदांस +, किंवा – आहे, तेव्हां त्यांचे गुणाकाराचे पूर्वी + मांड; जेव्हां एक पदास + आणि दुसऱ्याला – आहे, तेव्हां त्यांचे गुणाकारापूर्वीं – मांड; आरंभींचे पदास कांहीं चिन्ह नसलें, तर + हें चिन्ह आहे असें जाणून कृति कर.

६८. उदाहरण, (अ + ब)(अ + ब) यांचा गुणागार अअ + अब + अब + बब आहे. परंतु अब + अब हे २अब आहेत; यावरून अ + ब यांचा **वर्ग** अअ + २अब + बब आहे; पुनः, (अ – ब)(अ – ब) यांचा गुणाकार अअ – अब – अब + बब. परंतु अब ची दोन वेळा वजाबाकी, २अब चे वजाबाकी बरोबर; यावरून अ – ब यांचा **वर्ग** अअ – २अब + बब आहे. पुनः, (अ + ब)(अ – ब) यांचा गुणाकार अअ + अब–अब–बब आहे. परंतु अब मिळविल्यानें आणि वजा केल्यानें कांहीं अंतर पडत नाहीं; यावरून अ+ब आणि अ–ब यांचा गुणाकार अअ–बब आहे.

पुनः अ+ब+क+ड यांचा वर्ग, अथवा (अ+ब+क+ड)(अ+ब+क+ड) हा गुणाकार, अअ + २अब+ २अक+२ अड+बब + २ बक + २बड + कक + २कड + डड आहे; अथवा अशा परिमाणाचा वर्ग करण्याची रीति ही पुढील आहे; डाव्येकडचा पहिल्या पदाचा वर्ग कर, आणि त्या पदाचे उजव्येकडील वेगळाल्या सर्व पदांस त्या पहिल्या पदाचे दुपटीनें गुण; दुसऱ्या पदानें तसेंच कर, आणि याप्रमाणें शेवटचा पदापावेतों कर.

चवथा भाग.

भागाकार.

६९. १५६ हे कांहीं एक भागांत भागिलां येतील, असे कीं त्यांतील प्रत्येक भाग १३ होईल, अथवा १५६ यांत किती तेरा आहेत? अशा प्रश्नाचे उलगडण्यास **भागाकार** ह्मणतात. या पक्षांत, १५६ यांस **भाज्य** ह्मणतात, १३ यांस **भाजक** ह्मणतात, आणि इच्छिलेल्या भागांस **भागाकार** ह्मणतात; आणि भागाकार केल्यानंतर, १५६ यांस १३ नीं भागिलें असें ह्मणतात.

७०. १५६ यांतून १३ वजा करावे, आणि नंतर बाकींतून पुनः १३ वजा करावे, आणि याप्रमाणें पुढें करीत जावें; अथवा व्यवहारी बोलण्याप्रमाणें १५६ हे १३ नीं **मोजून घ्यावे**, ही भागाकार करण्याची सोपी रीति आहे. यासारिखीच कृति (४६) कलमांत वजाबाकीचे अभ्यासाविषयींचा उदाहरणांत सांगितली आहे. आतां वर सांगीतल्याप्रमाणें कर, आणि प्रत्येक वजाबाकी १५६ नांतून १३ कमी करितीं, ही आठवण राहण्यासाठीं प्रत्येक वजाबाकीचे समोर १ हा अंक मांड, ह्मणजे ही कृति या पुढीलप्रमाणें होईल.

```
१५६
 १३  १
------
१४३
 १३  १
------
१३०
 १३  १
------
११७
 १३  १
------
१०४
 १३  १
------
```

पहिल्यानें १५६ नांतून १३ वजा कर, ह्मणजे १४३ राहातील. नंतर १४३ सांतून १३ वजा कर, ह्मणजे १३० राहतील; आणि याप्रमाणें पुढेंहि. शेवटीं १३ मात्र राहतात, आणि त्यांतून १३ वजा केल्यानें कांहीं राहात नाहीं. तेव्हां किती वेळा १३ वजा केले हें मोजल्यानें असें दिसतें, कीं ते १२ वेळा वजा केले आहेत; अथवा १५६ यांत १३ हे १२ वेळा जातात.

ही सर्वांहून सोपी रीति आहे, आणि ही नुसत्या खड्यांनीं होईल. आरंभीं १५६ खड्यांची रास घे. नंतर त्या राशींतून १३ खडे घेऊन ते एक बाजूस ठेव. नंतर राशींतून दुसरे १३ खडे घेऊन त्यांची वरप्रमाणें नि-

१३	१
७८	
१३	१
६५	
१३	१
५२	
१३	१
३९	
१३	१
२६	
१३	१
१३	
१३	१
०	

पुनः असें करीत जा. शेवटीं वेगळाल्या राशी मोजल्या-वर त्या १२ आहेत असें दिसेल.

७१. भागाकार ह्मणजे गुणाकाराची उलट कृति आहे. गुणाकारामध्यें, कित्येक राशींची संख्या असती, जा प्रत्येकींत एकसारिखेच खडे असतात, आणि त्यावरून सर्वांत किती खडे आहेत, हें जाणण्याची इच्छा असती. भागाकारांत सर्व खडे किती आहेत, आणि प्रत्येक वेगळाले राशींत किती किती असावे हें माहित असतें, त्यावरून अशा किती राशी होतील, हें जाणायाची इच्छा असती.

७२. मागील उदाहरणांत अशी संख्या घेतली, कीं तींत १३ अमुक वेळा बरोबर जातात. परंतु प्रत्येक संख्येशीं असें घडत नाहीं. उदाहरण, १५९ ही संख्या घे. (७०) प्रमाणें कृतिकर, नंतर दिसण्यांत येईल, कीं १३ हे १२ वेळा वजा केल्यानंतर ३ बाकी राहतात, ह्मणून त्यांतून १३ वजा होत नाहींत. तर असें ह्मणण्यांत येतें कीं १५९ यांत १२ वेळा १३ आहेत, आणि ३ वर राहतात; अथवा १५९ यांस १३ नीं भागिलें असतां, भागाकार १२ आणि बाकी ३ राहतात. चिन्हें कामांत आणिलीं असतां, हें या पुढीलप्रमाणें होईल;

$$१५९=१३\times१२+३.$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

१४६=२४×६+२, अथवा १४६ यांत सहा, चोवीस वेळा जातात आणि २ वर राहतात.

१४६=६×२४+२, अथवा १४६ यांत चोवीस, सहा वेळा जातात आणि २ वर राहतात.

३००=४२×७+६, अथवा ३०० यांत बेचाळीस, सात वेळा जातात आणि ६ वर राहतात.

३९६२४=७२७७×५+३२३९.

अ = बक + र.

जर कांहीं बाकी नसली, तर अ = बक. वरचे उदाहरणांत अ भाज्य, ब भाजक, क भागाकार, आणि र बाकी आहे. अमध्यें ब हा क वेळा जातो हें दाखवायासाठीं या पुढीलप्रमाणें मांडितात,

$$\frac{अ}{ब} = क, \text{ अथवा } अ : ब = क,$$

कित्येक पूर्वींचा जुन्या पुस्तकांत याप्रमाणें मांडितात;

$$अ \div ब = क.$$

७४. १५६ यांचे निरनिराळे भाग जर केले, आणि त्या प्रत्येक भागांत १३ किती वेळा जातात हें जर पाहिलें, तर स्पष्ट आहे कीं जितक्या वेळा त्या वेगळाल्ये भागांत १३ जातात, तितक्या वेळा मिळून १३ हे १५६ नांत जातात. उदाहरण, ९१, ३९, आणि २६ हे मिळून १५६ होतात. या वेगळाल्या भागांत,

९१ यांत १३ हे ७ वेळा जातात,
३९ यांत १३ हे ३ वेळा जातात,
२६ यांत १३ हे २ वेळा जातात;

यामुळें ९१+३९+२६ यांत १३ हे ७+३+२ वेळा, अथवा १२ वेळा जातात.

पुनः, १००, ५०, आणि ६, मिळून १५६ होतात.

आतां १०० यांत १३ हे ७ वेळा जाऊन ९ वर राहातात,
५० यांत १३ हे ३ वेळा जाऊन ११ वर राहातात,
६ यांत १३ हे ०* वेळा जाऊन ६ वर राहातात.

यामुळें १००+५०+६ यांत १३ हे ७ + ३ + ० वेळा जाऊन, ९+११ + ६ वर राहातात; अथवा १५६ यांत १३ हे १० वेळा जाऊन २६ वर राहातात. परंतु २६ यांत १३ हे २ वेळा जातात; यामुळें १५६ यांत १३ हे १० आणि २ वेळा, अथवा १२ वेळा जातात.

---

* एक सारिखेंच बोलणें राहायासाठीं, ६ मध्यें १३ जात नाहीं असें ह्मणत नाहीं, परंतु त्याचे जागीं असें ह्मटलें पाहिजे, कीं ६ मध्यें १३ हे ० वेळा जाऊन ६ वर राहतात, यांचा अर्थ ६ हे ० पेक्षां ६ नीं अधिक आहेत असें ह्मणणें मात्र आहे.

७५. मागील कलमांतल्ये उदाहरणाची गोष्ट या पुढीलप्रमाणें दाखवितां येती.

$$\text{जर अ=ब+क+ड, तर } \frac{\text{अ}}{\text{म}} = \frac{\text{ब}}{\text{म}} + \frac{\text{क}}{\text{म}} + \frac{\text{ड}}{\text{म}}$$

७६. पहिल्या उदाहरणांत, अतिसोप्ये रितीनें उलगडायासाठीं, १३ हे एक वेळेपेक्षां अधिक वेळा वजा केले नाहींत. परंतु दोन वेळा १३, तीन वेळा १३, इत्यादि जाणल्यास, जितके वेळा १३ वजा करायास इच्छिलें, तितक्या वेळा १३ एकदांच वजा करितां येतील, परंतु त्या वेळा वजाबाकीचे बाजूस आठवणीसाठीं लिहिल्या पाहिजेत. उदाहरण, १० वेळा १३, ह्मणजे १३०, हे एकदांच १५६ यांतून वजा कर, २ वेळा १३, ह्मणजे २६ त्या वजाबाकींतून घे; ह्मणजे याप्रमाणें कृति होईल;

१५६
१३० ...... १० वेळा १३.
२६
२६ ...... २ वेळा १३.
००

यामुळें १५६ यांत १३ हे १०+२, अथवा १२ वेळा जातात.

पुनः, ३०९६ यांस १८ यांणीं भाग.

३०९६
१८०० . १०० वेळा १८.
१२९६
९०० . ५० वेळा १८.
३९६
३६० . २० वेळा १८.
३६
३६ . २ वेळा १८.
००

यामुळें ३०९६ यांत १८हे १००+५०+२०+२, अथवा १७२ वेळा जातात.

७७. यावरून हीं पुढील वाक्यें ध्यानांत येतील, आणि दुसऱ्या कोणत्याहि संख्यांविषयीं तशी प्रतिज्ञा करितां येईल.

४५० हे ७५×६ आहेत; यामुळें कोणतीहि संख्या, जसें ५, हे

जातील.

१३५ यांत ३ हे ... २६ वेळांपेक्षां अधिक वेळा जातात; यामुळें,

२ वेळ १३५ यांत ३ हे ... ५२ अथवा २ वेळा २६ पेक्षां अधिक वेळा जातात.

१० वेळ १३५ यांत ३ हे ... २६० अथवा १० वेळा २६ पेक्षां अधिक वेळा जातात.

५० वेळ १३५ यांत ३ हे ... १३०० अथवा ५० वेळा २६ पेक्षां अधिक वेळा जातात.

४७२ यांत १८ हे ... २१ वेळापेक्षां अधिक वेळ जातात; यामुळें,

४७२० यांत १८ हे ... २१० वेळांपेक्षां अधिक वेळा,—

४७२०० यांत १८ हे ... २१०० वेळांपेक्षां अधिक,—

४७२००० यांत १८ हे ... २१००० वेळांपेक्षां अधिक,—

३२ यांत १२ हे ... २ वेळांपेक्षां अधिक—परंतु ३ वेळांपेक्षां कमी वेळा जातात.

३२० यांत १२ हे ... २० वेळां .. ३० वेळां—

३२०० यांत १२ हे ... २०० वेळां .. ३०० वेळां—

३२००० यांत १२ हे ... २००० वेळां . ३००० वेळां—

इत्यादि. इत्यादि. इत्यादि.

७८. वरचा कलमामध्यें भागाकाराचीं मूळकारणें आहेत. आतां तीं संक्षेपानें आणि सोईनें कामांत आणावीं, इतकें मात्र दाखवायाचें राहिलें. मनांत आण कीं ४०६८ यांस १८ नीं भागायाचें, अथवा (२३) प्रमाणें $\frac{४०६८}{१८}$ हे किती येतात हें जाणण्याची इच्छा आहे.

जर ४०६८ यांचे अनेक भाग केले, तर त्या प्रत्येक भागांत १८ किती वेळा जातात हें (७४) चे कृतीवरून निघेल, आणि त्यावरून त्या सर्व अंकांत १८ किती वेळा जातात हें कळेल. आतां, ४०६८ यांचे कसे भाग केल्यानें सोईस पडेल? पहा कीं ४०६८ यांचा पहिला अंक ४,

यांत १८ कांहीं वेळा जात नाहीं; परंतु ४० हे दोन अंक मिळून, त्यांत १८ हे २ वेळांपेक्षां अधिक, परंतु ३ वेळांपेक्षां कमी वेळा जातात. परंतु (२०) प्रमाणें ४०६८ ही संख्या ४० शतक आणि ६८ आहे; ४० शतक यांत (७७) प्रमाणें १८ हे २०० वेळांपेक्षां अधिक, परंतु ३०० वेळांपेक्षां कमी वेळा जातात. यामुळें, ४०६८ यांत १८ हे २०० वेळांपेक्षां अधिक वेळा जातात, कां कीं ४००० यांत १८ हे २०० वेळांपेक्षां अधिक वेळा जातात. आणखी या संख्येंत १८ हे ३०० वेळांपेक्षां कमी वेळा जातात, कां कीं ३०० वेळा १८ हे ५४०० आहेत, आणि ४०६८ यांपेक्षां अधिक आहेत. आतां ४०६८ यांतून २०० वेळा १८ अथवा ३६०० वजा कर, तर ४६८ राहातील. यामुळें, ४०६८यांत १८ हे २०० वेळा जातात, आणि ४६८ यांत १८ जितके वेळा जातील, तितके वेळा अधिक जातील.

आतां, ४६८ यांत १८ किती वेळा जातात, हें काढायाचें राहिलें. तर पूर्वींप्रमाणेंच कर. पहा ४६ यांत १८ दोन वेळांपेक्षां अधिक आणि तीन वेळांपेक्षां कमी वेळा जातात; यामुळें (७७) प्रमाणें ४६० यांत १८ हे २० वेळांपेक्षां अधिक आणि ३० वेळांपेक्षां कमी वेळा जातात; ४६८ यांतहि तितक्याच वेळा जातात. तर २० वेळा १८ ह्मणजे ३६० यांस ४६८ तून वजा करून बाकी १०८ राहातात. यामुळें ४६८ यांत १८ हे २० वेळा जातात, आणि १०८ यांत जितके वेळा १८ जातात, तितक्या अधिक वेळा जातात. आतां, १०८ यांत १८ बरोबर ६ वेळा जातात असें दिसतें; यामुळें, ४६८ यांत १८ हे २०+६ वेळा जातात, आणि ४०६८ यांत १८ हे २००+२०+६, अथवा २२६ वेळा जातात. जर भाजक, भाज्य, आणि भागाकार, हे कौंसानें वेगळे करून एके ओळींत मांडिले, आणि कांहीं विवरण केल्यावांचून वर दाखवलेली कृति केली, तर ती या खालचा (अ) उदाहरणाप्रमाणें होईल.

३६३२६९९९ यांस १३४२ यांणीं भागायाचें आहे असें मनांत आण (ब).

(ब)

```
१३४२)३६३२६५९९ (२०००० + ७००० + ६०+९
     २६८४००००
     ---------
     ·९४८६५९९
      ९३९४०००
     ---------
      ··९२५९९
        ८०५२०
       -------
        १२०७९
        १२०७८
       -------
        ···१
```

(अ)

```
१८) ४०६८ (२००+२०+६
    ३६००
    ----
    ·४६८
     ३६०
    ----
     १०८
     १०८
    ----
      ··
```

पूर्वींचा उदाहरणाप्रमाणें, ३६३२६५९९ यांस ३६३२०००० आणि ६५९९ या दोन भागांत विभागिले आहेत ; भाजकापेक्षां अधिक असी संख्या असायासाठीं, भाज्याचे डाव्येकडून चार अंक घ्यावे लागतात, ह्मणून, ३६३२ हे पहिले चार अंक दुसऱ्यांपासून वेगळे केले आहेत. पुनः ३६३२००००यांत १३४२ हे २०००० पेक्षां अधिक आणि ३०००० यांपेक्षां कमी वेळा जातात असें दिसतें ; आणि १३४२ ×२००००, यांस भाज्यांतून वजा करून ९४८६५९९ बाकी राहातात. पुनः पुनः असी कृति करून, दिसतें, कीं २००००+७०००+६०+९, अथवा २७०६९ असा भागाकार होतो, आणि बाकी १ राहतो.

पुढें चालायाचे पूर्वीं हे पुढील प्रश्न वरचा कलमांतील कृतीप्रमाणें विस्तारानें करावे.

$\frac{१००९३८७४}{३२०७}$, $\frac{६६७७९९२२}{११४४३३}$, $\frac{२७१८२१८}{१३३५२}$, } यांचा किमती काय आहेत ?

यांचे वेगवेगळे भागाकार, ३१४७, ५८३, २०३, आणि त्यांचा वेगवेगळ्या बाक्या १४४५, ६५४८३, ७७६२, अशा आहेत.

७९. मागील कलमाचा उदाहरणांत, पहा, कीं पहिल्यानें, शून्यांशिवाय दुसरे अंक त्यांचे त्यांचे जागी ठेविले, तर वजाबाकीचे उजव्येकडे जीं शून्यें आहेत, त्यांस मांडायाचें प्रयोजन नाहीं ; दुसऱ्यानें, भा-

ज्याचे उजव्येकडील जे अंक शून्यावर येतात, त्यांचे मांडण्याचें काम पडत नाहीं, परंतु कृति करतांना त्यांचे खालचीं शून्यें नाहींशीं झाल्यावर ते घ्यावे लागतात, कां कीं वजावाकी करण्यांत ते कामांत येत नाहीं; **तिसऱ्यानें**, वरचे विस्तार रितीप्रमाणें भागाकाराची संख्या लांब लिहिण्याचें प्रयोजन नाहीं, ते अंक मात्र लिहिले पाहिजेत. उदाहरण, वर दाखविलेला पहिला भागाकार २००+२०+६, अथवा २२६ आहे; दुसरा भागाकार २००००+७०००+६०+९, अथवा २७०६९ आहे. तर यावरून, पहिल्या ओळीशिवाय, सर्व शून्यें आणि त्यांचे वरले अंक सोडून दे, आणि एक ओळींत भागाकार मांड; ह्मणजे मागल्या कलमाचीं दोन उदाहरणें याप्रमाणें होतील.

```
१८) ४०६८ (२२६          १३४२) ३६३२६५९९ (२७०६९
    ३६                        २६८४
    --                        ----
     ४६                        ९४८६
     ३६                        ९३९४
     ---                       -----
     १०८                         ९२५९
     १०८                         ८०५२
     ---                         -----
     ...                         १२०७९
                                 १२०७८
                                 -----
                                 ...१
```

८०. यावरून ही पुढील रीति निघती;

पहिल्यानें. भाजक आणि भाज्य एक ओळींत मांड, आणि भाज्याचे दोहों बाजूंस कौंस कर.

दुसऱ्यानें. भाज्याचा डाव्येकडून इतके अंक घे, कीं त्यांची संख्या भाजकापेक्षां एक अंक अधिक होईल; या अंकांत भाजक किती वेळा जातो तें काढ, आणि तो वेळांक भागाकाराचे डाव्येकडील पहिल्यास्थळीं मांड.

तिसऱ्यानें. वर सांगितल्याप्रमाणें आलेल्या अंकानें भाजकास गुण, आणि जे अंक भाज्याचे डाव्येकडून घेतले, त्यांचे खालीं वरचा गुणाकार मांडून तो वरचा अंकांतून वजा कर.

चवथ्यानें. दुसऱ्यानें सांगितल्याप्रमाणें जे अंक वेगळे घेतले, त्यांचे

उजव्येकडील जवळचा अंक या वजाबाकीचे उजव्येकडे मांड; असें वाढविल्यानें वजाबाकी जर भाजकापेक्षां अधिक असेल, तर त्यांत भाजक किती वेळा जातो तें काढ; तो वेळांकभागाकाराचा पूर्वींचा अंकाचे उजव्येकडे मांड, आणि असें पुनः पुनः करीत जा; जर वजाबाकी वाढविल्यानंतर भाजकापेक्षां अधिक नसली, तर भाज्यांतील दुसरा अंक तिचे उजव्येकडे मांड, आणि त्यानंतर दुसरा अंक मांड, आणि जोंपर्यंत ती बाकी भाजकापेक्षां मोठी होई तोंपर्यंत असें कर; परंतु शेवटील घेतलेल्या अंकाशिवाय जितके भाज्यांतून अंक घेऊन मांडिले असतील, त्या प्रत्येकाविषयीं भागाकार स्थळीं एक शून्य मांडिलें पाहिजे हें स्मरणांत ठेवावें.

पांचव्यानें. भाज्यांतील सर्व अंक संपतपावेतों या रितीनें करीत चाल.

कोणत्येहि मोठ्ये संख्येंत, भलती मोठी संख्या किती वेळा जाईल, हें पहायासाठीं, दोहों संख्यांतून अंकांची सारिखी संख्या घेऊन, मोठी संख्या न घेतां त्यांशीं कृति केल्यानें, अटकळीनें उत्तर कळेल. जसें, ४७३२ आणि १४३७९ यांतून ४ आणि १४ घेतले, तर १४ मध्यें ४ जितके वेळा जातात तितके वेळा सुमारानें १४३७९ यांत ४७३२ जातील, ह्मणजे सुमारानें ३ वेळा. कारण कीं १४००० यांत जितक्या वेळा ४००० जातात, तितक्या वेळा १४ मध्यें ४ जातात, आणि ४००० आणि १४००० यांचें आणि सांगितल्ये अंकांचें अंतर शतक, दशक इत्यादि लहान अंक येतें. तर सुमारानें कळेल, कीं १४००० यांत ४००० जाण्याचा आणि १४३७९ यांत ४७३२ जाण्याचा, या दोहों वेळांत फार अंतर पडणार नाहीं; आणि बहुतकरून याप्रमाणेंच घडतें. परंतु भाजकाचा दुसरा अंक ५ किंवा ५ पेक्षां अधिक असेल, तर वर सांगीतल्याप्रमाणें कृति केल्याचे पूर्वीं, भाजकाचे डावेकडील पहिला अंक १ नें वाढविल्यानें सोपें पडेल. ही अटकळ करण्याची हुशारी केवळ अभ्यासानें येईल.

८१. गुणाकार कोष्टक चांगला पाठ केल्यानंतर, (५०) प्रमाणें जर भाजक १२ पेक्षां अधिक नसेल, तर वरची कृति अधिक सरळ होईल. उदाहरण, १३२९७६ यांस ४ नीं भागायाचें आहे असें मनांत आण. विस्तारानें कृति पुढीलप्रमाणें होईल.

```
४)१३२९७६(३३२४४
  १२
  ──
   १२
   १२
   ──
   ..९
     ८
    ──
    १७
    १६
    ──
    .१६
     १६
     ──
     ..
```

परंतु १३ मध्यें ४ हे ३ वेळा जातात, आणि १ बाकी राहातो, तो मांडल्यावांचून स्मरणांत राहील; जो १ राहिला त्यास, भाज्यांतील पुढील अंक, ह्मणजे, २ याचे पूर्वी मांडून १२ होतील, त्या बारामध्यें ४ हे ३ वेळा बरोबर जातात, आणि याप्रमाणें पुढें. भागाकार मांडायास ही पुढील रीति सोईची आहे;

```
४)१३२९७६
  ───────
  ३३२४४
```

एथें या पुढील गोष्टी सांगायास योग्य आहेत; ५ यांणीं गुणायाचें असेल, तर उजव्येकडे शून्य जोडून २ नीं भागावें, हीं ५ नीं गुणाकार करण्याची सोपी रीति आहे, कां कीं १० वेळांचे अर्ध्या ५ वेळा आहेत. ५ यांणीं भागायाचें असेल, तर पहिल्यानें २ नीं गुणून उजव्येकडचा शेवटील अंक छेंकल्यानें भागाकार होईल; आणि छेंकलेल्या अंकाचें अर्ध भागाकाराची बाकी होईल. २५ यांणीं गुणायाचें असेल, तर दोन शून्यें जोडून ४ नीं भाग. २५ यांणीं भागायाचें असेल, तर ४ नीं गुणून त्याचे शेवटील दोन अंक छेंकून भागाकार होतो; दोन शेवटील छेंकलेल्ये अंकांचा चतुर्थांश बाकी होईल. कोणताहि अंक ९ नीं गुणायाचा असेल, तर त्या अंकास एक शून्य जोडून, त्यांतून तो सांगीतलेला अंक वजा कर, ह्मणजे, तो अंक १० वेळा घेतला आणि त्यांतून तो अंक एक वेळा वजा केला अशी त्याची कृति आहे. ९९ यांणीं गुणायाचें असेल, तर दोन शून्यें जोडून त्यांतून सांगीतलेला अंक वजा कर, इत्यादि.

कोणतीहि संख्या २ यांणीं निःशेष भागावयाजोगी असायासाठीं, तिचे एकंचे स्थळींचा अंक सम* असला पाहिजे. कोणतीहि संख्या

* शून्यास सम अंक असें मानितात.

४ यांणीं निःशेष भागायाजोगी असायासाठीं, तिचे उजव्येकडील दोन अंक ४ नीं निःशेष भागिले जावे. उदाहरण, १२३६ ही संख्या घे; ही संख्या १२ शें आणि ३६ मिळून झाली आहे, आणि तिचा प्रहिला भाग शतकाचा आहे, ह्मणून तो ४ नीं निःशेष भागिला जातो, आणि त्यापासून १२ पंचवीस येतात, आणि १२३६ ही संख्या ४ नीं निःशेष भागिली जाती कीं नाहीं, हें तिचा शेवटील दोन अंक, ह्मणजे, ३६, हे ४ नीं निःशेष भागले जातील कीं नाहीं, यावरून कळेल. जर कोणत्येहि संख्येचे उजवे बाजूचा शेवटील तीन अंक ८ नीं निःशेष भागिले जातात, तर ती संख्याहि ८ नीं निःशेष भागिली जाईल; कारण कीं उजव्येकडचा शेवटील तीन अंकांशिवाय संख्येंतील कोणताहि अंक हजारांचा असतो, आणि ८ नीं १००० निःशेष भागिले जातात; यावरून ती सर्व संख्या ८ नीं निःशेष भागिली जाती कीं नाहीं, हें शेवटील तीन अंकांवरून कळतें; जसें १२७९४६ ही संख्या ८ नीं निःशेष भागिली जात नाहीं, कारण कीं ९४६ हे शेवटील तीन अंक ८ नीं निःशेष भागिले जात नाहींत. जेव्हां एकाद्ये संख्येचा अंकांची बेरीज ३ अथवा ९ यांणीं निःशेष भागिली जाती, तेव्हां ती संख्या ३ अथवा ९ यांणीं निःशेष भागिली जाईल. उदाहरण, १२३४ ही संख्या घे; ह्मणजे,

	१ हजार,	अथवा	९९९ आणि १
	२ शें,	अथवा २ वेळा	९९ आणि २
	३ दशक,	अथवा ३ वेळा	९ आणि ३
आणि	४ एकं	अथवा	४

आतां ९, ९९, ९९९, इत्यादि, हे सर्व ९ आणि ३ यांणीं निःशेष भागिले जातात हें स्पष्ट दिसतें, आणि ते अंक वारंवार घेऊन जो अंक होईल तोहि ९ आणि ३ यांणीं निःशेष भागिला जाईल. तर १२३४ ही संख्या ३ अथवा ९ यांणीं निःशेष भागिली जाती कीं नाहीं, हें १+२+३+४, अथवा वेगळाल्या अंकांची बेरीज, ९ अथवा ३ यांणीं निःशेष भागिली जाती कीं नाहीं, यावरून कळतें. जेव्हां एकादी संख्या सम असून तिचा वेगळाल्या अंकांची बेरीज ३ नीं निःशेष भागिली जाती, तर ती सर्व संख्या ६ नीं निःशेष भागिली जाईल, हें वर सांगीतलेल्या गोष्टींवरून कळतें. जेव्हां एकाद्ये संख्येचा एकंचा स्थळीं

० किंवा ५ असतील, तर ती संख्या ५ नीं निःशेष भागिली जाईल.

८२. जेव्हां भाजक १ आहे, आणि त्याचे उजव्येबाजूस शून्यें आहेत, तेव्हां भागाकार करण्याची रीति अति सोपी आहे. ती या पुढील उदाहरणांपासून कळेल.

याची रीति हीच आहे; भाजकाचे उजव्येकडेस जितकीं शून्यें आहेत, तितके भाज्याचे उजवेकडील अंक छेंकून टाक; छेंकलेले अंक बाकी होईल, आणि भाज्याचे राहिलेले अंक भागाकार होईल.

```
१००)३३४२९(३३४
    ३००
    ---
     ३४२
     ३००
     ---
      ४२९
      ४००
      ---
       २९

१०)२७१७३१६
   -------
   २७१७३१ आणि ६ बाकी.
```

अथवा हीं उत्तरें खरीं आहेत हें याप्रमाणें सिद्ध करितां येईल; (२०) प्रमाणें, २७१७३१६ यांत २७१७३१ दशक आणि ६ आहेत, त्या पहिल्या संख्येंत १० हे २७१७३१ वेळा जातात आणि दुसरींत १० जात नाहींत; यामुळें (७२) प्रमाणें २७१७३१ हा भागाकार, आणि ६ ही बाकी आहे. पुनः (२०) प्रमाणें, ३३४२९ यांत ३३४ शतक आणि २९ आहेत; त्या पहिलींत १०० हे ३३४ वेळा जातात, आणि दुसरींत १०० जात नाहींत; यामुळें ३३४ भागाकार आणि २९ बाकी आहे.

८३. जेव्हां भाजकाचे उजव्येकडेस शून्यें आहेत, तेव्हां भागाकार करण्याची रीति संक्षिप्त कशी करावी, हें या पुढील उदाहरणांपासून कळेल. प्रत्येक उदाहरणाचे एकीकडे तेंच उदाहरण अनुपयोगी अंक छेंकून मांडिलें आहे; आणि तीं प्रत्येक दोन दोन उदाहरणें परस्पर ताडून पाहिलीं असतां, या कलमाचा शेवटीं जी रीति सांगितली, ती ध्यानांत येईल.

	१७८२०००)६४२४७०००००(३६०५	१७८२)६४२४७००(३६०५
	५३४६०००	५३४६
	१०७८७०००	१०७८७
(१.)	१०६९२०००	१०६९२
	९५०००००	९५००
	८९१००००	८९१०
	५९००००	५९००००
	१२३०००००)४२१७६१८९३००(३४२८	१२३)४२१७६१(३४२८
	३६९०००००	३६९
	५२७६१८९३	५२७
(२.)	४९२०००००	४९२
	३५६१८९३०	३५६
	२४६०००००	२४६
	११०१८९३००	११०१
	९८४०००००	९८४
	११७८९३००	११७९३००

याची रीति हीच आहे; भाजकाचे उजव्ये बाजूस जितकीं शून्यें आहेत, तितके भाज्यांतील अंक† छेक. नंतर भाजकांतील सर्व शून्यें छेकून, चालत्ये रितीप्रमाणें भागाकार कर; परंतु कृति संपल्यावर जितके भाज्यांतील अंक छेकले, तितके खालीं बाकीचे उजव्येकडेस मांड.

८४. अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

भाज्य.	भाजक.	भागाकार.	बाकी.
९६९४	४७	२०६	१२
१७५६१८	३१३६	५६	२
२३७९६४८४	१३००००	१८३	६४८४
१४००२५६४	१८७१	७४८४	०
३१०३१४४२०	७८७८	३९३९०	०
३९३९०४०६४७	६८८९	५७१७८७	४
२२८७६७९२४५४९६१	४३०४६७२१	५३१४४१	०

† म्हणजे शून्यें जमेस भरून त्यांचे भरीस लागतील तितके अंक घेऊन छेक.

(१). $\frac{१००\times१००\times१०० - ४३\times४३\times४३}{१०० - ४३} = १००\times१०० + १०० \times४३ + ४३\times४३$

(२). $\frac{१००\times१००\times१०० + ४३\times४३\times४३}{१०० + ४३} = १००\times१०० - १०० \times४३ + ४३\times४३$

(३). $\frac{७६\times७६ + २\times७६\times५२ + ५२\times५२}{७६ + ५२} = ७६ + ५२$

(४). $१ + १२ + १२\times१२ + १२\times१२\times१२ = \frac{१२\times१२\times१२\times१२ - १}{१२ - १}$

हीं उदाहरणें करून दाखीव.

१३७६४२९ यांचे अति जवळची संख्या कोणती आहे, जी ३६३०० यांणीं निःशेष भागिली जाईल? उत्तर. १३७९४००

जर १ वर्षांत ३६ बैल २१६ एकरांतील गवत खातात, आणि जर एक मेंढा बैलाचे निमें खातो, तर ४९ बैल आणि १३६ मेंढे मिळून १७५५० एकरांतील गवत किती काळांत खातील? उत्तर. २५ वर्षे.

८५. भलते दोन अंक घे, असे कीं एक दुसऱ्यास निःशेष भागितो; जसें ३२ आणि ४. या दोन अंकांस भलत्या दुसऱ्या अंकानें गुण; जसें ६ यांणीं. त्यांचा गुणाकार १९२ आणि २४ होईल. आतां, जितक्या वेळा ३२ यांत ४ जातात, तितक्या वेळा १९२ यांत २४ जातील. मनांत आण कीं ६ टोपल्या आहेत, आणि प्रत्येक टोपलींत ३२ खडे आहेत, तर सर्व टोपल्यांत १९२ होतील. एक टोपलींतून ती रिकामी होई तों, ४ खडे वारंवार काढ. स्पष्ट आहे कीं, केवळ एकच टोपलींतून ४ काढल्याचे जागीं, प्रत्येक टोपलींतून ४ काढले असतां, सर्व ६ टोपल्या एकदांच रिकाम्या होतील; ह्मणजे जितक्या वेळा ३२ यांत ४ जातात, तितक्या वेळा, ६ वेळा ३२ यांत ६ वेळा ४ जातात. हा तर्क दुसऱ्ये संख्यांस लागू होतो. यामुळें, **भाज्य आणि भाजक हे एकच संख्येनें गुणिले असतां त्यांचे भागाकारांत कांहीं फेर पडत नाहीं.**

८६. पुनः मनांत आण कीं २०० यांस ५० यांणीं भागायाचें आहे. भाज्य आणि भाजक एकच संख्येनें भाग, जसें ५ नीं. तर

२०० हे ५ वेळा ४० आणि ५० हे ५ वेळा १० आहेत. परंतु (८५) प्रमाणें ४० भागिले १० यांचा भागाकार, ५ वेळा ४० भागिले ५ वेळा १० यांचे भागाकाराबरोबर आहे, आणि यामुळें, **भाज्य आणि भाजक हे एकच संख्येनें भागिले असतां, त्यांचे भागाकारांत कांहीं फेर पडणार नाहीं.**

८७. (५५) प्रमाणें, जर कोणतीहि संख्या अनुक्रमें दुसऱ्या दोन संख्यांनीं गुणिली, तर ती पहिली संख्या दुसऱ्या दोन संख्यांचे गुणाकारानें गुणिल्याबरोबर होईल. जसें, २७ यांस पहिल्यानें ५ नीं गुणून पुनः तो गुणाकार ३ यांणीं गुणिला, आणि २७ यांस ५ वेळा ३ अथवा १५ यांणीं गुणिलें, हीं दोन्हीं बरोबर होतील. जर कांहीं संख्या दुसऱ्ये कांहीं संख्येनें भागिली, नंतर, तो भागाकार दुसऱ्ये संख्येनें भागिला, अथवा ती पहिली संख्या दुसऱ्ये दोन संख्यांचे गुणाकारानें भागिली, तर त्या दोहोंचें उत्तर सारिखेंच आहे. उदाहरण, ६० यांस ४ नीं भागिलें असतां १५ येतात, या भागाकारास ३ नीं भागिलें असतां, ५ येतात. ६० यांत १५ असे ४ समभाग आहेत, आणि तो प्रत्येक समभाग बरोबर ३ समभागांत विभागिला, तर सर्व मिळून १२ समभाग होतात; अथवा पहिल्यानें ४ आणि दुसऱ्यानें ३ यांणीं भागावें, अथवा ४×३, अथवा १२ नीं एकदांच भागावें या दोन्हीं कृती सारिख्याच आहेत, हें स्पष्ट आहे.

८८. पुढें जा रिती सांगतों त्या उदाहरणांपासून लक्षांत येतील. ३२ यांस २४ नीं गुणून तो गुणाकार ६ नीं भागिला, आणि २४ भागिले ६ नीं ह्मणजे ४, या भागाकारानें ३२ गुणिले हीं दोन्हीं उत्तरें बरोबर होतील; कां कीं २४ यांचा ६ वा भाग ४ आहे, याकरितां कोणतीहि संख्या २४ वेळा घेऊन तिचा ६ वा भाग, आणि तीच संख्या ४ वेळा घेतली हीं दोन्हीं बरोबर आहेत; अथवा २४ नीं गुणून ६ नीं भागावें, हें ४ नीं गुणिल्याबरोबर आहे.

८९. पुनः ४८ यांस ४ नीं गुणून, तो गुणाकार २४ नीं भागिला, अथवा २४ यांस ४ नीं भागून, ह्मणजे ६ या भागाकारानें ४८ यांस एकदांच भागिलें, हीं दोन्हीं बरोबर आहेत. कां कीं ४८ यांत जो प्रत्येक एक ६ वेळा घेतला आहे, तोच एक ४ वेळा अधिक घेतला आहे, अथवा, ४ वेळा ४८ यांत तोच एक २४ वेळा घेतला आहे,

अथवा ४८ आणि ६ यांचा भागाकार, आणि ४८ × ४ आणि ६ × ४ यांचा भागाकार हीं दोन्हीं बरोबर आहेत.

९०. बीजगणित रूपानें वरचे पांच कलमांचा कृती या पुढीलप्रमाणें मांडितां येतात ;

$$(८५)\ \text{प्रमाणें}\ \frac{\text{मअ}}{\text{मब}} = \frac{\text{अ}}{\text{ब}}$$

जर अ आणि ब यांस न निःशेष भागितो, तर

$$(८६)\ \text{प्रमाणें}\ \frac{\frac{\text{अ}}{\text{न}}}{\frac{\text{ब}}{\text{न}}} = \frac{\text{अ}}{\text{ब}} \quad (८७)\ \text{प्रमाणें}\ \frac{\frac{\text{अ}}{\text{ब}}}{\text{क}} = \frac{\text{अ}}{\text{बक}}$$

$$(८८)\ \text{प्रमाणें}\ \frac{\text{अब}}{\text{क}} = \text{अ} \times \frac{\text{ब}}{\text{क}} \quad (८९)\ \text{प्रमाणें}\ \frac{\text{अक}}{\text{ब}} = \frac{\text{अ}}{\frac{\text{ब}}{\text{क}}}$$

जा पक्षांत सर्व भागाकार निःशेष होतात, त्या पक्षास मात्र वरची गोष्ट लागू होती हें स्मरणांत ठेविलें पाहिजे.

९१. जेव्हां एक संख्या दुसऱ्ये संख्येनें निःशेष भागिली जाती, अथवा, पहिल्ये संख्येंत दुसरी संख्या कांहीं बरोबर वेळा जाती, तेव्हां ती दुसरी संख्या पहिल्ये संख्येचा भाजक, किंवा **मापक**, अथवा ती पहिल्ये संख्येस निःशेष **मापिती**, किंवा भागिती, असें ह्मणतात. जसें ४ हे १३६ यांचे मापक आहेत, अथवा १३६ यांस ४ हे निःशेष मापितात; परंतु १३७ यांस ४ हे निःशेष मापीत नाहींत. मापक हा शब्द कामांत आणण्याचें कारण हें पुढील आहे; मनांत आण कीं एक काठी ४ फुटी लांबीची आहे, तिजवर कांहीं खुणा केलेल्या नाहींत, आणि त्या काठीनें कांहीं लांबी मापावयाची आहे; जसें एक रस्ता. तो रस्ता जर १३६ फुटी लांबीचा असेल, तर त्या काठीनें तो निःशेष मापितां येईल; कां कीं १३६ यांत ४ हे ३४ वेळा जातात, यावरून कळेल, कीं रस्त्याची लांबी काठीचे लांबीचे बरोबर ३४ पट आहे. परंतु रस्त्याची लांबी १३७ फुटी असली, तर ती त्या काठीनें निःशेष मापवत नाहीं; कां कीं ३४ काठ्या मापल्यावर, कांहीं बाकी मापावयाची राहिली असें दिसेल, आणि यावरून त्या काठीचा कांहीं लहान मापावांचून, ती बाकीची लांबी मापवत नाहीं. यामुळे १३६ यांस ४ हे

निःशेष मापितात, परंतु १३७ यांस ४ निःशेष मापीत नाहींत असें ह्मणतात. तर जो भाजक संख्येस निःशेष भागितो, त्यास त्या संख्येचा निःशेष भाजक किंवा माप ह्मणतात.

९२. जेव्हां कांहीं संख्या दुसऱ्या दोन संख्यांचा मापक किंवा भाजक आहे, तेव्हां तीस, त्या दोन संख्यांचा **साधारण मापक**, किंवा भाजक ह्मणतात. जसें, १५ हे १८० आणि ७५ यांचा साधारण भाजक आहे. दोन संख्यांस अनेक साधारण भाजक असतात. उदाहरण, ३६० आणि १६८ यांचे साधारण भाजक २,३,४,६,२४, आणि यांशिवाय दुसरेहि आहेत. आतां, यावरून कदाचित् हा पुढील प्रश्न उत्पन्न होईल; कीं ३६० आणि १६८ यांचा सर्व साधारण भाजकांतून, अति मोठा भाजक कोणता? अंकगणिताचे एक रितीपासून या प्रश्नाचें उत्तर कळेल, आणि त्यास **अति मोठा साधारण भाजक** ह्मणतात. अति मोठा साधारण भाजक यास, भास्कराचार्याचे रितीप्रमाणें **दृढ भाजक** ह्मणतात, त्याचा आतां विचार करितों.

९३. जर एक परिमाण दुसऱ्या दोन परिमाणांस भागितें, तर त्या दोन परिमाणांची बेरीज आणि वजाबाकी यांसहि तें परिमाण भागितें. जसें ७ हे २१ आणि ५६ यांस भागितात. यामुळें ५६+२१ आणि ५६−२१, अथवा ७७ आणि ३५ यांसहि ७ भागितात. पूर्वी (७४) कलमांत जी गोष्ट सांगीतली, ती हीच आहे, परंतु एथें ती सांगण्याची तऱ्हा निराळी आहे.

९४. जर एक संख्या दुसऱ्ये संख्येस भागिती, तर जितक्या संख्यांस ती दुसरी संख्या भागिती, त्या सर्व संख्यांसहि ती पहिली संख्या भागील. जसें, ५ हे १५ यांस भागितात, आणि १५ हे ३०, ४५, ६०, ७५, इत्यादि या सर्व संख्यांस भागितात; यावरून या सर्व संख्यांस ५ भागितील. स्पष्ट आहे, कीं जर,

१५ यांत ५ हे ३ वेळा जातात,

तर ३०, अथवा १५+१५ यांत ५ हे ३+३ वेळा, अथवा ६ वेळा जातात.

४५, अथवा १५+१५+१५ यांत ५ हे ३+३+३ वेळा, अथवा ९ वेळा जातात; आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

९५. जी संख्या भाजक आणि भाज्य यांस भागिती, ती बाकीसहि भागिती. हें दाखवायासाठीं, ३६० यांस ११२ यांणीं भाग, यांचा

भागाकार ३ येऊन बाकी २४ राहतात, ह्मणजे (७२) प्रमाणें ३६० हे ३ वेळा ११२ आणि २४ आहेत, अथवा ३६०=११२×३+२४. यावरून कळतें, कीं ३६० आणि ३ वेळा ११२ यांचें अंतर २४ आहे, अथवा २४=३६०−११२×३. ३६० आणि ११२ यांस जे अंक भागितात, त्यांतून कोणताहि एक घे; जसें, ४ तर

४ हे ३६० यांस भागितात,

४ हे ११२ यांस भागितात, आणि यामुळें (९४) प्रमाणें

११२×३, अथवा ११२+११२+११२ यांसहि भागितात,

यामुळें (९३) प्रमाणें ३६०−११२×३, अथवा त्यांची वजाबाकी ह्मणजे २४, यांसहि ४ भागितात. ३६० आणि ११२ यांचा सर्व दुसऱ्या भाजकांविषयींहि ही गोष्ट लागू होती; आणि यावरून हें सिद्ध होतें, कीं जें परिमाण भाज्य आणि भाजक यांस भागितें, तें त्यांचे बाकीसहि भागितें. यावरून भाज्य आणि भाजक यांचा जो प्रत्येक **साधारण भाजक** आहे, तोच भाजकाचा आणि बाकीचाहि **साधारण भाजक** आहे.

९६. भाजक आणि बाकी यांचा जो साधारण भाजक आहे, तोच भाजक आणि भाज्य यांचाहि साधारण भाजक आहे. वरचें उदाहरण घे, आणि लक्षांत ठेव कीं ३६०=११२×३+२४ आहेत. बाकी २४ आणि भाजक ११२ यांचा कोणताहि साधारण भाजक घे; जसें ८. तर

८ हे २४ यांस भागितात;

आणि ८ हे ११२ यांस भागितात, आणि यामुळें (९४) प्रमाणें

११२×३ यांसहि भागितात.

यावरून (९३) प्रमाणें ८ हे ११२×३+२४यांस भागितात, अथवा ३६० भाज्यासहि भागितात. तर बाकीचा आणि भाजकाचा जो साधारण भाजक आहे, तोच भाजक आणि भाज्य यांचाहि साधारण भाजक आहे, अथवा बाकीचा आणि भाजकाचा असा कोणताहि साधारण भाजक नाहीं, कीं जो भाजक आणि भाज्य यांचाहि साधारण भाजक होत नाहीं.

९७. **पहिल्यानें.** (९५) कलमांत सिद्ध झालें, कीं भाजक आणि

भाज्य यांचे जे सर्व साधारण भाजक आहेत, ते बाकी आणि भाजक यांचेहि सर्व साधारण भाजक आहेत.

दुसऱ्यानें. (९६) कलमांत सिद्ध झालें, कीं त्यांस कांहीं दुसरे साधारण भाजक नाहींत.

यावरून निघतें, कीं वर **पहिल्यानें** सांगितल्ये दुसऱ्ये दोन रकमांचा जो दृढभाजक आहे, तो पहिल्ये दोन रकमांचाहि दृढभाजक आहे, ह्मणजे यावरून कोणत्येहि दोन संख्यांचा दृढभाजक† काढण्याची रीति पुढीलप्रमाणें कळेल ;

९८. वरचें उदाहरण घे, ह्मणजे ३६० आणि ११२ यांचा दृढभाजक काढण्याचा आहे असें मनांत आण, आणि पहा कीं

३६० भागिले ११२, यापासून २४ बाकी राहातात,
११२ भागिले २४, यापासून १६ बाकी राहातात,
२४ भागिले १६, यापासून ८ बाकी राहातात,
१६ भागिले ८, यापासून कांहीं बाकी राहात नाहीं.

आतां ८ हे १६ यांस निःशेष भागितात, आणि ८ हे आठांस निःशेष भागितात, यास्तव ८ हे ८ आणि १६ यांचा दृ०भा०आहे, कारण कीं ८ यांस ८ पेक्षां कोणत्येहि मोठ्ये अंकानें भागितां येत नाहीं; ह्मणजे १६ यांस जरी ८ पेक्षां अधिक मोठा साधारण भाजक असला, तरी तो १६ आणि ८ या दोहोंचा **साधारण** भाजक असत नाहीं.

यामुळें ८ हा १६ आणि ८ यांचा दृ० भा० आहे,
(९७) प्रमाणें १६ आणि ८ यांचा जो दृ० भा०, तोच २४ आणि १६ यांचा दृ० भा० आहे,
२४ आणि १६ यांचा जो दृ० भा०, तोच ११२ आणि २४ यांचा दृ० भा० आहे;
११२ आणि २४ ...., तोच ३६० आणि ११२ यांचा दृ० भा० आहे;
यामुळें ८ हा ३६० आणि ११२ यांचा दृ० भा० आहे.

या पुढीलप्रमाणें दृ० भा० काढण्याची कृति मांडितात.

† संक्षेपानें दृढभाजकाचे स्थळीं, दृ० भा० असें मांडिलें आहे.

```
११२)३६०(३
    ३३६
    ---
     २४)११२(४
         ९६
         ---
         १६)२४(१
            १६
            ---
             ८)१६(२
               १६
               ---
                ०
```

११२	३६० ३
९६	३३६ ४
१६	२४ १
१६	१६ २
०	८

दोन संख्यांचा दृ० भा० काढण्याची रीति.

पहिल्यानें. मोठी संख्या लहान संख्येनें भाग.

दुसऱ्यानें. त्यापासून जी बाकी राहाती, तीस नवा भाजक कर, आणि वरचे भाजकास भाज्यस्थळीं मांडून, भागाकार करून दुसरी बाकी काढ.

तिसऱ्यानें. याप्रमाणें बाकी न राहीपर्यंत पुढें करीत जा, म्हणजे शेवटील भाजक इच्छिलेला दृ० भा० होईल.

१९. कदाचित् असें कोणी विचारील कीं, जेव्हां दोन संख्यांस कोणताहि साधारण भाजक नाहीं, तर ही गोष्ट रितीवरून कशी कळेल? खरें म्हटलें, तर अशा संख्याच नाहींत, कां कीं सर्व संख्या १ यानें भागिल्या जातात; म्हणजे सर्व संख्येंत अनेक एकंचा संग्रह आहे, आणि यामुळें कोणत्याहि दोन संख्यांचा साधारण भाजक १ आहे. त्यांस दुसरा कांहीं साधारण भाजक नसला, तर शेवटील भाजक १ होईल, जसें या पुढील उदाहरणांत, ८७ आणि २९ यांचा दृ० भा० काढायास सांगितला आहे.

```
२९)८७(३
   ७५
   ---
   १२)२९(२
      २४
      ---
       १)१२(१२
         १२
         ---
          ०
```

अभ्यासासाठीं उदाहरणें.

संख्या.		दृ० भा०
६१९७	९५२१	१
५८३६३	२६०२	१
५५४७	१४७००८४४३	१८४९
६२८१	३२६०४१	५७१
२८९१५	३१४९५	५
१५०९	२००३०९	३

३६×३६+२×३६×७२+७२×७२,

आणि ३६×३६×३६+७२×७२×७२; ह्या संख्या काय आहेत, आणि यांचा दृ० भा० काय आहे? उत्तर. ११६६४.

१००. जर दोन संख्या तिसऱ्ये संख्येने भागिल्या जातात, आणि त्यांचे दोन भागाकार पुनः चवथ्ये संख्येने भागिले जातात, तर ती तिसरी संख्या दृ० भा० नाहीं. उदाहरण, ३६०, आणि ५०४ ह्या दोन्हीं ४ यांणीं भागिल्या जातात. त्यांचे भागाकार ९० आणि १२६ आहेत. आतां ९० आणि १२६ या दोन्हीं ९ नीं भागिल्या जातात, आणि त्यांचे भागाकार १० आणि १४ आहेत. (८७) प्रमाणें, कोणतीहि संख्या ४ नीं भागून, तो भागाकार ९ नीं भागिला, अथवा ती संख्या ४×९ अथवा ३६ यांणीं एकदांच भागिली, तर त्या दोन्हीं कृती सारिख्याच आहेत. तर, ३६० आणि ५०४ यांचा साधारण भाजक ३६ आहे, आणि ४ पेक्षां ३६ मोठे आहेत. तर यावरून त्यांचा दृ० भा० ४ नाहीं. पुनः १० आणि १४ हे २ नीं भागिले जातात, असें असतां ३६ हाहि दृ० भा० नाहीं. यावरून कळतें कीं जेव्हां दोन संख्या त्यांचे दृ० भा० न भागाव्या, तेव्हां (९९) प्रमाणें त्यांचे भागाकारांस १ या शिवाय दुसरा कांहीं साधारण भाजक नाहीं. अथवा जा संख्येस मागील वाक्यांत दृ० भा० असें नाव दिलें, तें खरें नाहीं असें होईल.

१०१. तीन संख्यांचा दृ० भा० काढाया करितां, पहिल्यानें, पहिली आणि दुसरी या संख्यांचा दृ० भा० काढ. नंतर तो दृ० भा० आणि तिसरी संख्या, यांचा दृ० भा० काढ. कारण, पहिली आणि दुसरी या संख्यांचे सर्व साधारण भाजक मात्र दृ० भा० कांत आहेत, आणि दुसरे नाहींत. ह्मणून पहिली, दुसरी आणि तिसरी या संख्यांशीं जे साधारण भाजक आहेत, ते मात्र तिसरी आणि पहिली, या दोन संख्यांचा दृढ भाजकाशीं साधारण आहेत, दुसरे भाजक नाहींत. तशाच रितीनें चार संख्यांचा दृ० भा० काढायाकरितां, पहिली, दुसरी, आणि तिसरी, या संख्यांचा दृ० भा० काढून, तो दृ० भा० आणि चवथी संख्या यांचा दृ० भा० काढावा.

१०२. जेव्हां एका संख्येंत दुसरी संख्या जाती, अथवा पहिली संख्या दुसरीनें निःशेष भागिली जाती, तेव्हां पहिल्ये संख्येस दुस-

रीचें गुणित ह्मणतात. **गुणित** आणि **भाजक** यांचा संबंध पुढें दाखविल्याप्रमाणें आहे; ह्मणजे ४ हा २४ यांचा भाजक आहे, आणि २४ हें ४ चें गुणित आहे. ९६ हें ८, १२, २४, ४८, आणि यांखेरीज अनेक दुसऱ्या अंकांचें गुणित आहे. यामुळें ९६ यांस ८,१२,२४,४८, इत्यादि यांचें **साधारण गुणित** ह्मणतात. कोणतेहि दोन संख्यांचा गुणाकार त्या दोन संख्यांचें साधारण गुणित आहे हें स्पष्ट आहे. जसें, ३६×८, अथवा २८८ हें ३६ आणि ८ यांचें साधारण गुणित आहे. परंतु २८८ पेक्षां लहान असीं, ३६ आणि ८ यांचीं साधारण गुणितें आहेत; आणि जेव्हां दोन परिमाणांचे साधारण गुणिताचें काम लागतें, तेव्हां त्यांतून अति लहान गुणित घेतल्यानें सुलभ पडतें, यासाठीं दोन संख्यांचें अति लहान गुणित* काढण्याची रीति दाखवितों.

१०३. उदाहरण, ३६ आणि ८ या दोन संख्या घे. यांचा दृ० भा० काढ, ह्मणजे तो ४ आहे, आणि पहा, कीं ३६ हे ९×४, आणि ८ हे २×४ आहेत. तर ३६ आणि ८ यांस त्यांचे दृ० भाजकानें भागून त्यांचे भागाकार ९ आणि २ आहेत. हे दोन भागाकार परस्पर गुणून तो गुणाकार त्यांचे दृ० भा० ४ यांणीं गुण, ह्मणजे ९×२×४, अथवा ७२ होतात. तर, (५५) प्रमाणें ८, अथवा ४×२ यांचें गुणित ७२ आहे; आणि ३६ अथवा ४×९ यांचेंहि तेंच गुणित आहे. आणि ७२ हें ३६ आणि ८ यांचें लघुतम गुणित आहे; परंतु ही गोष्ट याजागीं सिद्ध करून दाखवितां येत नाहीं, कां कीं, अंकांचे जागीं अक्षरें कामांत आणण्याचा अधिक अभ्यासावांचून, याची सिद्धता पुरतेपणीं समजोन येणार नाहीं. वर सांगितलेल्या पक्षांत ७२ हें लघुतम साधारण गुणित आहे, यापेक्षां अधिक जाणण्याचें प्रयोजन नाहीं, आणि दुसऱ्या कोणत्याहि पक्षांत अति लहान साधारण गुणित अशे कृतीनें काढितां येईल. हेंच अति लहान साधारण गुणित आहे, असें जाणायाचें केवळ अगत्य नाहीं. कां कीं, जेव्हां कोणतेंहि साधारण गुणित कामांत आणण्याचें आहे, तेव्हां अति लहानाचा जागीं त्याचा सारिखें दुसरें कोणतेंहि साधारण गुणित कामांत घेतां येईल. अति मोठ्ये संख्येशीं काम करण्याचें चुकविण्यासाठीं मात्र दुसरीं गुणितें न घेतां, लघुतम गुणितास घेतात. लघुतम गुणितास लघुतम साधारण गुणाकारहि ह्मणतात.

* अति लहान साधारण गुणित यास प्रसिद्ध चालीप्रमाणें लघुतम गुणित ह्मणतात.

लघुतम साधारण गुणाकार त्यांचे गुणाकाराबरोबर आहे.

लघुतम साधारण गुणाकार काढण्याची रीति; दोन संख्यांचा लघुतम गुणाकार काढायासाठीं, त्यांचा दृ० भा० काढ, नंतर त्यांतून एक संख्या या दृ० भाजकानें भागून, त्या भागाकारानें दुसऱ्या संख्येस गुण, ह्मणजे तो गुणाकार लघुतम साधारण गुणाकार आहे. तीन संख्यांचा लघुतम साधारण गुणाकार काढायासाठीं, आरंभीं पहिल्ये दोन संख्यांचा लघुतम साधारण गुणाकार काढ, नंतर तो लघुतम साधारण गुणाकार, आणि तिसरी संख्या यांचा लघुतम साधारण गुणाकार काढ, आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

सांगितल्या संख्या.	लघुतम साधारण गुणाकार.
१४, २१	४२
१६, ५, २४	२४०
१, २, ३, ४, ५, ६, ७, ८, ९, १०	२५२०
६, ८, ११, १६, २०	२६४०
८७६, ८६४	६३०७२
८६८, ८५४	५२९४८

अनेक संख्यांचा दृ० भा० सहज लक्षांत येतो, त्यावरून त्या संख्यांचा लघुतम साधारण गुणाकार काढायास ही पुढील रीति सोईची आहे; दोन किंवा अधिक, असे साधारण भाजक जे केवळ १ यानें भागिले जातात ते घे, आणि ते वेगळाले भाजक स्थळीं मांड, आणि सांगितल्या संख्यांतून प्रत्येक संख्येस त्या भाजकांतील एक किंवा अधिक भाजकानें भाग. ते वेगळाले भागाकार, आणि ज्या संख्या भागिल्या जात नाहींत त्या, त्यांचे त्यांचे खालीं मांड. नंतर खालीं घेतलेल्या अंकांशीं तसेंच पुनः पुनः कर, जोंपर्यंत त्यांतून कोणत्याहि दोन अंकांस एका वांचून कोणताहि दृ० भा० नाहीं. नंतर लघुतम साधारण गुणाकार जाणायासाठीं, सर्व वेगळाले भाजक आणि खालीं आलेले सर्व अंक पर-

धारण गुणाकार काढायाचा असें मनांत आण.

२,२,३,५,७) ११ १२ १३ १४ १५ १६ १७ १८ १९ २० २१

११ १ १३ १ १ ४ १७ ३ १९ १ १

आतां खालचे ओळीचे संख्यांस १ वांचून दुसरा कांहीं दृ० भा० नाहीं. तर २×२×३×५×७×११×१३×४×१७×३×१९, अथवा २३२७९२५६० हा लघुतम लाधारण गुणाकार आहे.

पांचवा भाग.

अपूर्णांक.

१०४. मनांत आण कीं ४९ यार्डांस ५ समभागांत भागावयाचें आहे, ह्मणजे, व्यवहारी बोलण्याप्रमाणें, ४९ यार्डांचा ५ वा भाग काढायाचा आहे. जर ४९ यांस ५ यांणीं भागिलें, तर भागाकार ९ येतो, आणि वर ४ राहातात; ह्मणजे, (७२) प्रमाणें, ४९ यांत ५ वेळा ९ आणि ४ आहेत. ४९ यार्ड दाखविण्यासाठीं अब रेघ घे;

अ ———————————————— ब

क ———————— ऐ—

ड ———————— ख—

इ ———————— ल—

फ ———————— म—

ग ———————— न—

ह ऐ ख ल म न

९ यार्ड लांबीचा अशा ५ रेघा, क,ड,इ,फ, आणि ग घे, आणि ४ यार्ड लांबीची दुसरी ह रेघ घे. तर जा पेक्षां ४९ हे ५ वेळा ९ आणि ४ आहेत, तर, क,ड,इ,फ,ग, आणि ह, या सर्व रेघा मिळून अब रेघेचा बरोबर आहेत. ह रेघ ४ यार्डांची आहे, तीस ऐ,ख,ल,-

क,ड,इ,फ आणि ग, या रेघांचे बाजूस जोड. यावरून क,ड,इ,फ,ग, ऐ,ख,ल,म,न, या सर्व रेघा मिळून अब, अथवा ४९ यार्डांचे बरोबर आहेत. आतां ड रेघ आणि ख रेघ मिळून, क रेघ आणि ऐ रेघ यांचे बरोबर आहेत, त्याचप्रमाणें इ रेघ आणि ल रेघ, फ रेघ आणि म रेघ, आणि ग रेघ आणि न रेघ, या निरनिराळ्या दोन दोन रेघा क रेघ आणि ऐ रेघ यांचे बरोबर आहेत. यामुळें, क आणि ऐ या दोन रेघा मिळून ५ वेळा घेतल्या असतां, ४९ यार्ड होतील; ह्मणजे, क आणि ऐ मिळून ४९ यार्डांचा पांचवा भाग आहे.

१०५. क ही रेघ कांहीं नियमित लांबीची आहे, ह्मणजे ९ यार्ड; परंतु ऐ रेघ नव्ये जातीचें परिमाण आहे, जें अद्यापी कधींहि आढळांत आलें नव्हतें. ही रेघ पूर्ण यार्ड लांबीची नाहीं, कां कीं ४ यार्डांस ५ समभागांत विभागून, त्यांतून १ भाग घेतल्यानें ती रेघ उत्पन्न होती. ती रेघ ४ यार्डांचा पांचवा भाग आहे. तीस यार्डांचा **अपूर्णांक** किंवा **अंश** ह्मणतात. (२३) प्रमाणें त्यास $\frac{४}{५}$ याप्रमाणें मांडितात, आणि ४९ यार्डांचा पांचवा भाग पूर्ण करायासाठीं ९ यार्डांस $\frac{४}{५}$ हे मिळवावे लागतात.

धान्याचे ४९ मण, अथवा जमिनीचे ४९ एकर, यांस ५ समभागांत भागायास वरची कल्पना लागू होईल. पहिल्याचा पांचवा भाग, ९ मण आणि ४ मणांचा पांचवा भाग याबरोबर होईल; आणि दुसऱ्याचा पांचवा भाग ९ एकर आणि ४ एकरांचा पांचवा भाग यांचा बरोबर होईल.

सर्वांविषयीं याप्रमाणें ह्मटलें पाहिजे, कीं ४९ चा पांचवा भाग, ९ आणि $\frac{४}{५}$, अथवा ९+$\frac{४}{५}$ आहे; यास ९$\frac{४}{५}$ या रितीनें मांडितात, अथवा चिन्हें कामांत घेतलीं असतां, $\frac{४९}{५}$=९$\frac{४}{५}$ असें लिहितात.

अभ्यासासाठीं उदाहरणें.

१२३७ यांचा सत्रावा भाग काय आहे? उत्तर. ७२$\frac{१३}{१७}$

$\frac{१००३२}{१९७४}$, $\frac{६६३८१९}{२३७१०}$, आणि $\frac{२२७७३३९९}{२४२४}$ हे काय आहेत?

उत्तरें. ५$\frac{१६२}{१९७४}$, २७$\frac{२३६४९}{२३७१०}$, ९३९४$\frac{२३४३}{२४२४}$.

१०६. अपूर्णांक या शब्दाचा अर्थ कांहीं संख्येचा भाग आहे असें समजावें, अथवा जा समभागांत एकादि संख्या विभागली आहे त्या समभागांतील कांहीं भागांची बेरीज आहे असें समजावें. जसें,

संग्रह होतो; उदाहरण, १७ हे $\frac{१७}{१}$, $\frac{३४}{२}$, $\frac{५१}{३}$, इ० आहेत.

अपूर्णांकांतील वरचा अंकास **अंश** ह्मणतात, आणि खालचा अंकास **छेद** ह्मणतात, आणि या दोहोंस अपूर्णांकाचीं **पदें** ह्मणतात. जेव्हां अंश छेदापेक्षां कमी असतो, तेव्हां अपूर्णांक एकापेक्षां कमी आहे; जसें, $\frac{६}{१७}$ हा एकापेक्षां कमी आहे; कां कीं ६ हे ६ समभागांत भागिले असतां प्रत्येक भाग १ चे बरोबर आहे, आणि त्यांस १७ भागांत भागिलें असतां प्रत्येक १ पेक्षां अगत्य कमी असावा. त्यासारिखें, जेव्हां अंश आणि छेद बरोबर आहेत तेव्हां अपूर्णांक एकाचे बरोबर आहे; आणि जेव्हां अंश, छेदापेक्षां अधिक आहे तेव्हां अपूर्णांक एकापेक्षां अधिक आहे.

१०७. $\frac{२}{३}$ याचा अर्थ २ चा तिसरा भाग आहे असें जाणावें. हें आणि १ चा तिसऱ्या भागाची दुप्पट हीं दोन्हीं सारिखींच आहेत.

हें सिद्ध करून दाखविण्यासाठीं, दोन यार्ड लांबीची **अब** रेघ कर, आणि त्यांतील **अक** आणि **कब** या प्रत्येक यार्डास तीन समभागांत भाग.

अ ड ई क फ ग ब

तर **अइ**, **इफ** आणि **फब** परस्परांशीं बरोबर असतां २ चा तिसरा भाग **अइ** आहे. यामुळें तो $\frac{२}{३}$ आहे. परंतु **अइ** रेघ **अड** रेघेचे दुप्पट आहे, आणि **अड** रेघ एक यार्डाचा तिसरा भाग अथवा $\frac{१}{३}$ आहे. यामुळें $\frac{२}{३}$ हे $\frac{१}{३}$ चे दुप्पट आहेत; ह्मणजे, **अब** रेघेची $\frac{२}{३}$ लांबी काढायासाठीं, दोन यार्ड एकदांच तीन समभागांत भागून त्यांतून **एक** भाग घेतला, अथवा **एक** यार्ड तीन समभागांत भागून, त्यांतून **दोन** भाग घेतले, तरी कांहीं फेर होत नाहीं. त्याच कल्पनेवरून $\frac{५}{८}$ हा अपूर्णांक, ५ हे ८ भागांत भागून त्यांतून एक घेतल्यानें, अथवा १कास ८ भागांत भागून, त्यांतून ५ भाग घेतल्यानें काढितां येईल. या दोनहि रिती सारिख्याच आहेत, यामुळें त्यांतून जी रीति समयास **सोईस** पडेल, तीच या पुढें घेऊं. हें मूळ कारण या पुढीलप्रमाणें आहे; कोणतेहि संख्येचा तिसरा भाग काढण्यासाठीं, त्या संख्येंत जितके एकं असतील,

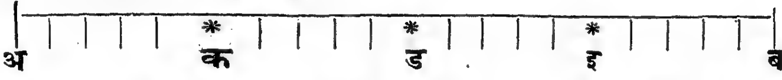
* ५,७,१००, इत्यादि जात एकमांचो बरोबर संख्या आहे, त्यास **पूर्णांक** ह्मणतात, तेणेंकरून ते अपूर्णांकांपासून भिन्न आहेत असें दाखवितां येतें.—

जसें, २चा अथवा २ एकंमाचा तिसरा भाग, त्यांतील प्रत्येक एकंमाचे तिसऱ्ये भागांची बेरीज घेतल्यानें निघतो, ह्मणजे,

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\times 2.$$

जेव्हां अंश, छेदांपेक्षां अधिक असतात, तेव्हां वरच्या गोष्टीपासून संशय उत्पन्न होईल; जसें, $\frac{15}{7}$ याचा अर्थ असा होईल, कीं १ यास ७ समभागांत भागून त्यांतून १५ भाग घेण्याचे आहेत असें वाटेल. परंतु या पक्षीं एकंमाची संख्या असी घ्यावी, कीं त्यांतून प्रत्येक एकं ७ भागांत भागिला असतां, सर्व भागांची संख्या १५ पेक्षां अधिक होईल, आणि नंतर त्या भागांतून १५ भाग घेतले असतां अपूर्णांक उत्पन्न होतो.

१०८. अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद एकाच परिमाणानें गुणिले असतां अपूर्णांकाची किंमत बदलत नाहीं. $\frac{3}{4}$ हा अपूर्णांक घे, त्याचे अंश आणि छेद ५ यांणीं गुणिल्यानें $\frac{15}{20}$ होतात, हा अपूर्णांक आणि $\frac{3}{4}$ हे दोन्हीं एकच आहेत; ह्मणजे, पंधरा यार्डांचा विसावा भाग आणि तीन यार्डांचा च्वथा भाग हे एकच आहेत; अथवा, अपूर्णांक या शब्दाचा वर सांगितलेल्या दोन अर्थांतून दुसरा अर्थ कामांत घेतला तर, एक यार्ड २० भागांत भागून त्यांतून १५ घेतले, आणि एक यार्ड ४ भागांत भागून त्यांतून तीन घेतले, तरी लांबी सारिखीच येईल. ही गोष्ट याप्रमाणें सिद्ध होती,



एक यार्ड दाखविण्यासाठीं अब रेघ कर; तीस अक, कड, डइ, आणि इब, अशा ४ समभागांत भाग, नंतर त्यांतील प्रत्येक भाग ५ समभागांत भाग. यावरून दिसतें कीं अइ रेघ $\frac{3}{4}$ आहे. परंतु पुनः लहान भाग केल्यानें अब रेघ २० भागांत भागिली आहे, त्यांतील १५ भाग अइ रेघेंत येतात. तर ती अइ रेघ $\frac{15}{20}$ आहे. यामुळें $\frac{15}{20}$ आणि $\frac{3}{4}$ हे एकच आहेत.

पुनः $\frac{15}{20}$ याचे अंश आणि छेद ५ यांणीं भागून $\frac{3}{4}$ होतात, यामुळें अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद एकच परिमाणानें भागिले असतां, त्याची किंमत बदलत नाहीं. हें मूळ कारण अंकगणितांत सर्वत्र फार उपयोगी पडतें, आणि व्यवहारी बोलण्यांतहि तें फार येतें, कां कीं २१

णतात.

१०९. $\frac{३}{४}$ आणि $\frac{१५}{२०}$ या दोन अपूर्णांकांची किंमत जरी बरोबर आहे, आणि त्यांतून कोणताहि एक दुसऱ्याचे जागीं चुकीवांचून कामांत घेतां येईल, तथापि दुसऱ्यापेक्षां पहिला कामांत आणायास सोईस पडतें, कां कीं १५ यार्डांचा २० वा भाग यापासून जो बोध होतो, त्यापेक्षां तीन यार्डांचा चवथा भाग यापासून अधिक बोध होतो, ह्मणून तो केवळ सोईचा आहे इतकेंच नाहीं, परंतु पहिल्या अपूर्णांकाचे अंक फार लहान आहेत, ह्मणून गुणाकार आणि भागाकार करायास सुलभ पडतें, या कारणावरून तो अपूर्णांक फार करून घेतात. याजकरितां जेव्हां कांहीं अपूर्णांक सांगीतला आहे, त्याचे अंश आणि छेद यांस कांहीं साधारण भाजक किंवा दृढभाजक आहे कीं नाहीं हें पहावें. (९८) वे कलमांत कोणतेहि दोन संख्यांचा दृढभाजक काढण्याची रीति सांगीतली, आणि असें दाखविलें आहे, कीं जर कोणत्याहि दोन संख्या त्यांचे दृढभाजकानें भागिल्या, तर त्यांचा भागाकारास १ शिवाय दुसरा कोणताहि दृढभाजक नाहीं. अपूर्णांकाचा पदांचा दृढभाजक काढून त्याणें तीं पदें भाग, तर असें केल्यानें त्या अपूर्णांकाचें **अतिसंक्षेपरूप झालें** असें ह्मणतात, आणि त्याचे या रूपानें त्याचे किंमतीचा बोध चांगला होतो.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

या प्रत्येक अपूर्णांकापुढें त्याचें अतिसंक्षेपरूप लिहिलें आहे.

$$\frac{२७९४}{२९२१} = \frac{२२\times१२७}{२३\times१२७} = \frac{२२}{२३}$$

$$\frac{२७८८}{४९२०} = \frac{१७\times१६४}{३०\times१६४} = \frac{१७}{३०}$$

$$\frac{९३२०८}{१३७८६} = \frac{७६४\times१२२}{११३\times१२२} = \frac{७६४}{११३}$$

$$\frac{८८८८००}{४०३५९६००} = \frac{२२\times४०४००}{९९९\times४०४००} = \frac{२२}{९९९}$$

$$\frac{९५४६९}{३५९७८४} = \frac{१२१\times७८९}{४५६\times७८९} = \frac{१२१}{४५६}$$

११०. अपूर्णांकाचीं पदें गुण्य गुणकरूपानें सांगितलेलीं असतात, तेव्हां अंशांतील एक गुण्यगुणक आणि छेदांतील एक गुण्यगुणक, हे एका अंकानें भागितां येतील तर त्यांस त्या अंकानें भागावें. ही गोष्ट (८८) आणि (१०८) कलमांपासून उत्पन्न होती. पुढील उदाहरणांत जे अंक भागाकारानें बदलतात, त्यांवर स्वर चिन्हें केलीं आहेत.

$$\frac{१२\times ११\times १०}{२\times ३\times ४} = \frac{३'\times ११\times १०}{२\times ३\times १'} = \frac{१'\times ११\times ५'}{१'\times १'\times १'} = ५५.$$

$$\frac{१८\times १५\times १३}{२०\times ५४\times ५२} = \frac{२'\times ३'\times १'}{४'\times ६'\times ४'} = \frac{१'\times १'\times १'}{२'\times २'\times ४'} = \frac{१}{१६}.$$

$$\frac{२७\times २८}{९\times ७०} = \frac{३'\times ४'}{१'\times १०'} = \frac{३'\times २'}{१'\times ५'} = \frac{५}{६}.$$

१११. (१०८) प्रमाणें किंमत बदलल्यावांचून, कोणत्याहि अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद कोणत्याहि संख्येनें गुणितां येतात, यावरून दोन अपूर्णांकांस दुसऱ्या दोन अपूर्णांकांचें रूप देतां येतें, असें कीं दुसऱ्यांची किंमत पहिल्यांचे बरोबर असून, त्यांचे छेद सारिखेच होतील. उदाहरण, $\frac{२}{३}$ आणि $\frac{४}{७}$ घे; $\frac{२}{३}$ याचीं दोन्हीं पदें ७ यांणीं गुण, आणि $\frac{४}{७}$ याचीं दोन्हीं पदें ३ यांणीं, गुण यावरून असें दिसतें, कीं

$\frac{२}{३}$ हे $\frac{२\times ७}{३\times ७}$ अथवा $\frac{१४}{२१}$ आहेत.

$\frac{४}{७}$ हे $\frac{४\times ३}{७\times ३}$ अथवा $\frac{१२}{२१}$ आहेत.

एथें तर $\frac{१४}{२१}$ आणि $\frac{१२}{२१}$ असे दोन अपूर्णांक आहेत, आणि त्यांचे छेद २१ सारिखेच असून, त्यांची किंमत $\frac{२}{३}$ आणि $\frac{४}{७}$ यांचे बरोबर आहे; या पक्षांत $\frac{२}{३}$ आणि $\frac{४}{७}$ हे समछेद झाले असें ह्मणतात.

$\frac{१}{१०}$, $\frac{५}{६}$ आणि $\frac{७}{९}$, हे समछेद करावयाचे आहेत असें मनांत आण. पहिल्या अपूर्णांकाचीं दोन्हीं पदें ६ आणि ९ यांचे गुणाकारानें गुण; दुसऱ्याचीं १० आणि ९ यांचे गुणाकारानें गुण; आणि तिसऱ्याचीं १० आणि ६ यांचे गुणाकारानें गुण. तेव्हां (१०८) प्रमाणें असें दिसतें कीं

* जी संख्या दुसऱ्या संख्येस निःशेष भागिती, तीस दुसरीचा गुण्य किंवा गुणक ह्मणतात; असें ४, ६, ८, हे २४ चे गुण्य किंवा गुणक आहेत, आणि ६×४, ८×३, २×२×२×३, आणि दुसऱ्या कित्येक तऱ्हांनीं २४ चें गुण्य गुणकांत पृथःकरण होतें.

$\frac{\ldots}{१०}$ … $\frac{\ldots}{१०\times६\times९}$ … $\frac{\ldots}{५४०}$,

$\frac{५}{६}$ हे $\frac{५\times१०\times९}{६\times१०\times९}$ अथवा $\frac{४५०}{५४०}$ आहेत,

$\frac{७}{९}$ हे $\frac{७\times७०\times६}{९\times१०\times६}$ अथवा $\frac{४२०}{५४०}$ आहेत,

शेवटींचे अपूर्णांक पाहून, असें दिसतें कीं त्यांचे सर्व अंश आणि समछेद, ६ यांणीं भागिले जातात, आणि (१०८) प्रमाणें भागिल्यानें त्यांची किंमत बदलत नाहीं. $\frac{५४}{५४०}$, $\frac{४५०}{५४०}$ आणि $\frac{४२०}{५४०}$ यांचे अंश आणि छेद ६ यांणीं भागून $\frac{९}{९०}$, $\frac{७५}{९०}$, आणि $\frac{७०}{९०}$ असे अपूर्णांक येतात. हे समछेद अपूर्णांक आहेत, आणि $\frac{१}{१०}$, $\frac{५}{६}$, आणि $\frac{७}{९}$ यांसारिखेच आहेत, आणि यामुळें ते पहिल्या अपूर्णांकांपेक्षां सरळ आहेत. आणखी पहा कीं ५४० हे १०,६,९, अथवा १०×६×९ यांचें, एक साधारण गुणित आहे, परंतु (१०२)प्रमाणें १०,६, आणि ९ यांचें लघुतम साधारण गुणित ९० आहे. यामुळें, ही पुढील कृति वरचे कृतीपेक्षां बरी आहे. $\frac{१}{१०}$, $\frac{५}{६}$, आणि $\frac{७}{९}$ यांची किंमत बदलल्यावांचून समछेद करायासाठीं, पहिल्यानें, (१०२) कलमाचे रितीप्रमाणें, १०,६,९, यांचें लघुतम साधारण गुणित काढ, तें ९० आहे. पहा कीं ९० यांत १०,६, आणि ९, हे वेगवेगळे ९,१५, आणि १० वेळा जातात. तर पहिल्या अपूर्णांकाचीं दोन्हीं पदें ९ नीं गुण, दुसऱ्याचीं १५ नीं गुण, आणि तिसऱ्याचीं १० नीं गुण, ह्मणजे $\frac{९}{९०}$, $\frac{७५}{९०}$, $\frac{७०}{९०}$, असे अपूर्णांक पूर्वींप्रमाणेंच येतात.

सांगितलेल्या अंकांत कदाचित् पूर्णांक असला, तर त्यास अपूर्णांकाचें रूप देतां येऊन, दुसऱ्याशीं समछेद (१०६) कलमाचे रितीप्रमाणें करितां येईल.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

सांगितले अपूर्णांक	समछेद झालेले.
$\frac{२}{३}$, $\frac{१}{५}$, $\frac{१}{६}$	$\frac{२०}{३०}$, $\frac{६}{३०}$, $\frac{५}{३०}$
$\frac{१}{३}$, $\frac{२}{७}$, $\frac{३}{१४}$, $\frac{१२}{२१}$, $\frac{३}{४}$	$\frac{२८}{८४}$, $\frac{२४}{८४}$, $\frac{१८}{८४}$, $\frac{४८}{८४}$, $\frac{६३}{८४}$
३, $\frac{४}{१०}$, $\frac{५}{१००}$, $\frac{९}{१०००}$	$\frac{३०००}{१०००}$, $\frac{४००}{१०००}$, $\frac{५०}{१०००}$, $\frac{९}{१०००}$
$\frac{३३}{३७९}$, $\frac{२८१}{६७७}$	$\frac{२२३४१}{२५६५८३}$, $\frac{१०६४९९}{२५६५८३}$

११२. दोन अपूर्णांकांस समछेद केल्यानें, त्यांस ताडून पहातां येतें; ह्मणजे, दोहोंतून कोणता मोठा आणि कोणता लहान हें सांगतां येतें. उदाहरण, $\frac{१}{२}$ आणि $\frac{७}{१५}$ घे. यांची किंमत न बदलतां समछेद करून, $\frac{१५}{३०}$ आणि $\frac{१४}{३०}$ निघतात. यांतून पहिला अगत्य मोठा असावा, कां कीं (१०७) प्रमाणें एकांस ३० समभागांत भागिल्यानें, आणि त्यांतून १५ घेतल्यानें तो अपूर्णांक होतो, परंतु त्याच समभागांतून १४ घेतल्यानें मात्र दुसरा होतो.

दोन अपूर्णांकांस समछेद असले तर जास मोठा अंश आहे तो त्यांतून मोठा आहे; आणि जा दोन अपूर्णांकांस सारिखेच अंश असतील, त्यांतील जास लहान छेद आहे तो मोठा हें स्पष्ट आहे. जसें $\frac{८}{९}$ पेक्षां $\frac{८}{७}$ मोठे आहेत, कां कीं पहिला ८ चा १ नवमांश, आणि दुसरा ८ चा १ सप्तमांश आहे. पुनः, छेद हवा तेवढा वाढविल्यानें, कोणताहि अंश हवातेवढा लहान अपूर्णांकाचा आहे असें करितां येईल. जसें, (१०८) प्रमाणें $\frac{१०}{१००}$ हे $\frac{१}{१०}$ आहेत, $\frac{१०}{१०००}$ हे $\frac{१}{१००}$ आहेत, आणि $\frac{१०}{१०००००००}$ हे $\frac{१}{१०००००००}$ आहेत.

आतां, $\frac{१}{२}$ यास $\frac{७}{१५}$ मिळवितां येतील किंवा यांतून वजा करितां येतील. कां कीं पहिला अपूर्णांक हा, १ याचे ३० समभागांतील १५ भाग आहेत. दुसरा अपूर्णांक त्या समभागांतील १४ भाग आहेत. यामुळें त्या दोहोंची बेरीज १५+१४, अथवा त्या समभागांतून २९ भाग अगत्य असावी; ह्मणजे, $\frac{१}{२}+\frac{७}{१५}$ हे $\frac{२९}{३०}$ आहेत. त्या दोहोंची वजाबाकी १५−१४, अथवा त्या समभागांतून १ भाग अगत्य असावी; ह्मणजे, $\frac{१}{२}-\frac{७}{१५}=\frac{१}{३०}$.

११३. मागील दोन कलमांपासून या पुढील रिती निघतात;

पहिल्यानें. अपूर्णांकांस ताडून पहायासाठीं, त्यांची बेरीज, किंवा वजाबाकी करायासाठीं, पहिल्यानें त्यांस समछेद कर. असें केल्यानंतर जास मोठा अंश आहे, तोच त्यांतील मोठा अपूर्णांक आहे.

त्या दोन अपूर्णांकांचे बेरिजेचा अंश, त्या दोन अपूर्णांकांचे अंशांची बेरीज आहे, आणि समछेद त्या बेरिजेचा छेद आहे.

त्यांचे वजाबाकीचा अंश त्यांचे अंशांचे वजाबाकी बरोबर आहे, आणि समछेद त्यांचे वजाबाकीचा छेद आहे.

$\frac{१}{२}+\frac{१}{३}+\frac{१}{४}-\frac{१}{५}=\frac{५३}{६०}$ $\quad$ $\frac{४४}{३}-\frac{१५३}{४२७}=\frac{१८३२९}{१२८१}$

$१+\frac{८}{१०}+\frac{३}{१००}+\frac{४}{१०००}=\frac{१८३४}{१०००}$ $\quad$ $२-\frac{१}{७}+\frac{१२}{१३}=\frac{२५३}{९१}$

$\frac{१}{२}+\frac{८}{१६}+\frac{९४}{१८८}=\frac{३}{२}$ $\quad$ $\frac{१६३}{५२१}-\frac{९७}{८८१}=\frac{९३०६६}{४५९००१}$

११४. मनांत आण, कीं एक पूर्णांक अपूर्णांकासीं मिळवायाचा आहे, जसें ६ हे $\frac{४}{९}$ यांस मिळवायाचे आहेत. (१०६) प्रमाणें ६ हे $\frac{५४}{९}$ आहेत, आणि $\frac{५४}{९}+\frac{४}{९}$ हे $\frac{५८}{९}$ आहेत ; ह्मणजे, $६+\frac{४}{९}$, अथवा मांडण्याचे चालीप्रमाणें $६\frac{४}{९}$, हे $\frac{५८}{९}$ आहेत, या पक्षांत रीति हीच आहे; पूर्णांकास अपूर्णांकाचे छेदानीं गुण, आणि त्या गुणाकारास अपूर्णांकाचे अंश मिळीव ; ही बेरीज उत्तराचे अंश होतील, आणि अपूर्णांकाचे छेद उत्तराचे छेद होतील. जसें, $३\frac{१}{४}=\frac{१३}{४}$, $२२\frac{५}{९}=\frac{२०३}{९}$, $७४\frac{२}{५५}=\frac{४०७२}{५५}$. ही रीति (१०५) कलमांतील रितीचे उलटी आहे.

११५. मागील रितीपासून असें दिसतें कीं $१७२३\frac{२०७}{१००००}$ हे $\frac{१७२३०२०७}{१००००}$ आहेत, $६६७\frac{२२५}{१०००}$ हे $\frac{६६७२२५}{१०००}$ आहेत, आणि $२३\frac{९९}{१०००००}$ हे $\frac{२३०००९९}{१०००००}$ आहेत. यावरून जेव्हां कोणताहि पूर्णांक अशो अपूर्णांकास मिळवायाचा आहे, कीं जाचें छेदस्थळीं १ आणि त्यावर कांहीं शून्यें येतात, आणि त्या शून्यांची संख्या त्या अपूर्णांकाचे अंशांतील **अंकांचे** संख्येपेक्षां कमी नाहीं, तर या पुढील रितीनें कर ; पहिल्यानें पूर्णांक मांड, नंतर त्याचे उजव्येकडेस अपूर्णांकाचे अंश मांड, आणि अंशांतील अंक संख्येपेक्षां जितकी छेदांतील **शून्यांची** संख्या अधिक असेल, तितकीं शून्यें या दोहों अंकांचे मध्यें मांड. असें केल्यानें उत्तराचा अंश निघतो, आणि अपूर्णांकाचा जो छेद तोच या उत्तराचा छेद आहे. जर छेदस्थळांतील शून्यांची संख्या अंश स्थळांतील अंक संख्येचे बरोबर असेल, तर पूर्णांक आणि अपूर्णांकाचा अंशाचे अंक यांमध्यें कांहीं शून्यें मांडू नको.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

$१\frac{२३७०७}{१००००००}$, $२४५७\frac{६}{१०}$, $१२०७\frac{२९९}{१००००००००}$, आणि $२३३\frac{२२१०}{१००००}$, या मिश्रसंख्यांस अपूर्णांकाचे रूप दे.

११६. मनांत आण, कीं $\frac{२}{३}$ यांस ४ नीं गुणायाचे आहे. (४८)

(११२) प्रमाणें यांची बेरीज $\frac{६}{३}$ आहे; यावरून अपूर्णांकास पूर्णांकानें गुणायाची रीति हीच कीं: अपूर्णांकाचे अंश पूर्णांकानें गुण, आणि त्याचे छेद तसेच राहूं दे.

११७. पूर्णांकानें अपूर्णांक गुणायाचा असल्यास, त्या पूर्णांकानें जर अपूर्णांकाचे छेद निःशेष भागिले जातात, तर या पुढीलप्रमाणें रीति आहे. अपूर्णांकाचे छेद पूर्णांकानें भाग, आणि त्याचे अंश तसेच राहूं दे. उदाहरण, $\frac{७}{३६}$ यांस ६ नीं गुणायाचें आहे. तर (११६) प्रमाणें $\frac{७}{३६}\times६=\frac{४२}{३६}$ आहेत, यांत अंश आणि छेद ६ यांणीं भागिले जातात, तर (१०८) प्रमाणें ते आणि $\frac{७}{६}$ हे बरोबरच आहेत. तर स्पष्ट होतें, कीं वर सांगीतलेल्या रितिप्रमाणें $\frac{४२}{३६}$ यापासून $\frac{७}{६}$ हे उत्पन्न होतात.

११८. दुसऱ्या संख्येंत जितके एकं आहेत, तितक्या वेळा कांहीं संख्या घेणें ही गुणाकार कृति आहे असें पूर्वी दाखविलें. जसें १२ यांस ७ नीं गुणायाचें, ह्मणजे ७ यांत जितके एकं आहेत तितक्या वेळा १२ घेणें आहेत, अथवा ७ होण्याकरितां जितक्यावेळा १ घ्यावा लागतो, तितक्या वेळा १२ घेण्याचे आहेत. जसें, ७ होण्याकरितां १ या अंकाशीं जी कृती करावी लागती तीच कृती ७ वेळा १२ होण्याकरितां १२ या अंकाशीं केली पाहिजे. उदाहरण,

७ हे १+१+१+१+१+१+१.

७ वेळा १२ हे १२+१२+१२+१२+१२+१२+१२.

दोन अपूर्णांकांशीं अशीच कृतिं केली, तरी फळास गुणाकार ह्मणतात, आणि या कृतीसहि गुणाकार ह्मणतात. यांत इतकाच भेद, कीं पूर्णांक करायासाठीं १ कांहीं वेळा घ्यावा लागतो, परंतु अपूर्णांक करायासाठीं १ यास कांहीं समभागांत भागून त्यांतील एक **समभागास** तोच भाग कांहीं वेळा मिळावा लागतो. गुणाकार या शब्दाचा वर सांगितलेला अर्थ अपूर्णांकास लाविला असतां, $\frac{३}{४}$ यांस $\frac{७}{८}$ नें गुणिलें तर काय होतें ? $\frac{७}{८}$ हे करायासाठीं जें काम १ शीं केलें तेंच काम $\frac{३}{४}$ यांशीं केलें पाहिजे; परंतु $\frac{७}{८}$ करायासाठीं, १ यास आठ समभागांत भागून, त्यांतून ७ घेतले आहेत. यामुळें, $\frac{३}{४}\times\frac{७}{८}$ हे करायासाठीं, $\frac{३}{४}$ यांस आठ समभागांत भागून, त्यांतून ७ घेतले पाहिजेत. आतां (१०८) प्रमाणें $\frac{३}{४}$ आणि $\frac{२४}{३२}$ सारिखेच आहेत. $\frac{२४}{३२}$ हे करायास १ हा ३२ समभागांत,

$\frac{[illegible]}{३२}$ यांस ८ समभागांत भागिलें, तर त्यांतील प्रत्येक भाग $\frac{[illegible]}{३२}$ आहे; आणि जर त्यांतून ७ भाग घेतले, तर (११६) प्रमाणें $\frac{२१}{३२}$ उत्पन्न होतात; यामुळें $\frac{३}{४}$ यांस $\frac{७}{८}$ यांणीं गुणिलें, तर $\frac{२१}{३२}$ उत्तर आहे; आणि ही कल्पना दुसऱ्ये कोणतेहि अपूर्णांकांस लागू होईल. परंतु $\frac{२१}{३२}$ हे $\frac{३}{४}$ आणि $\frac{७}{८}$ यांपासून याप्रमाणें होतात, ह्मणजे, त्यांचे दोन अंश परस्पर गुणून अंश होतो, आणि त्या दोहोंचे छेद परस्पर गुणून छेद होतो; ह्मणजे यापासून अपूर्णांकाचा गुणाकार करायाची रीति निघती.

११९. $\frac{२१}{३२}$ हा गुणाकार तिसऱ्या अपूर्णांकानें गुणायाचा असेल, जसें $\frac{५}{९}$ यांणीं, तर तशीच रितीनें, $\frac{१०५}{२८८}$ हें फळ आहे; आणि याप्रमाणें पुढेंहि. यामुळें भलत्या कांहीं अपूर्णांकाचा गुणाकार करायाची ही पुढील सामान्य रीति आहे.

अंश करायासाठीं वेगळाले अंश परस्पर गुण, आणि छेद करायासाठीं वेगळाले छेद परस्पर गुण.

१२०. $\frac{१५}{१६}$ आणि $\frac{८}{१०}$ हे परस्पर गुणायाचे आहेत असें मनांत आण. यांचा गुणाकार या पुढीलप्रमाणें मांडावा; $\frac{१५×८}{१६×१०}$ ह्मणजे, $\frac{१२०}{१६०}$, आणि या अपूर्णांकास (१०९) प्रमाणें अतिसंक्षेपरूप देऊन $\frac{३}{४}$ होतील. १५ आणि १० हे दोन्हीं ५ नीं भागिले जातात, आणि ८ आणि १६ हे दोन्हीं ८ नीं भागिले जातात, आणि सांगितला अपूर्णांक $\frac{३×५×८}{२×८×२×५}$ या रितीनें मांडितां येतो. ही सगळी गोष्ट मनांत धरून वरचें उत्तर लागलेंच निघतें. याचे अंश आणि छेद या दोहोंस (१०८) आणि (८७) प्रमाणें ५×८ यांणीं भागिलें असतां, लागलेंच $\frac{३}{४}$ उत्पन्न होतात; यामुळें, अनेक अपूर्णांक गुणायाचे पूर्वीं, जर त्यांतील एका अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद, अथवा एकाचे अंश आणि दुसऱ्याचे छेद, यांस जर साधारण भाजक असेल, तर त्यांस त्या साधारण भाजकानें भागून, त्यांचा भागाकार त्यांचे भाज्यांचे स्थळीं कृति करायास कामांत घे.

पूर्णांकाला अपूर्णांकाचें रूप देणें, तर छेदस्थळीं १ लिहिल्यानें अपूर्णांक होतो असें कल्पावें; जसें, १६ हे (१०६) प्रमाणें $\frac{१६}{१}$ आहे; आणि एक किंवा अधिक पदें जेव्हां पूर्णांक असतात, त्यांस हीच रीति लागू होईल.

$$\frac{१३६}{७४७०}\times\frac{२६८}{९११}=\frac{३६४४८}{६८६४९३०}=\frac{१८२२४}{३४३२४६५}$$

$$\frac{१}{२}\times\frac{२}{३}\times\frac{३}{४}\times\frac{४}{५}=\frac{१}{५}, \qquad \frac{२}{१७}\times\frac{१७}{४५}=\frac{२}{४५}$$

$$\frac{२}{५९}\times\frac{१३}{७}\times\frac{२४१}{१९}=\frac{६२६६}{७८४७}. \qquad \frac{१३}{४६१}\times\frac{६०१}{११}=\frac{७८१३}{५०७१}$$

सांगीतले अपूर्णांक.	वर्ग.	घन.
$\frac{७०१}{१५८}$	$\frac{४९१४०१}{२४९६४}$	$\frac{३४४४७२१०१}{३९४४३१२}$
$\frac{१४०}{१४१}$	$\frac{१९६००}{१९८८१}$	$\frac{२७४४०००}{२८०३२२१}$
$\frac{३५५}{११३}$	$\frac{१२६०२५}{१२७६९}$	$\frac{४४७३८८७५}{१४४२८९७}$

भूमीचे १०० एकरांतून, त्यांचे $\frac{२}{३}$ वजाकरून, बाकीला ५० एकर मिळवून, नंतर त्या बेरिजेंचे $\frac{५}{७}$ काढून उत्तर काय होईल ? उत्तर, ५९ $\frac{११}{२१}$.

१२१. एक पूर्णांक दुसऱ्ये पूर्णांकानें भागणें, ह्मणजे १०८ यांस ९ यांणीं भागणें, तर पहिल्यानें याप्रमाणें प्रश्न उत्पन्न होतो, अनेक नवांचे बेरिजेनें, १०८ उत्पन्न होतील कीं काय ? जर होतील, तर किती वेळा ९ घेतले पाहिजेत ?

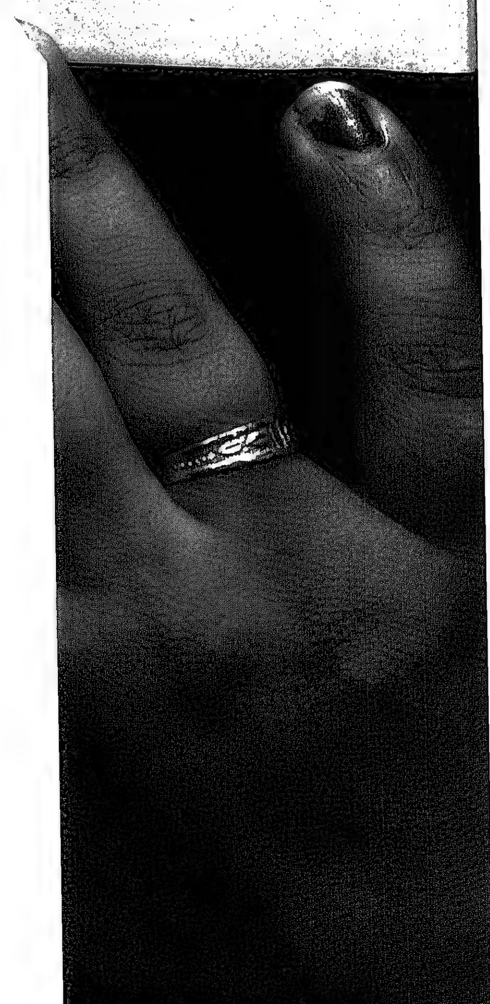
मनांत आण, कीं $\frac{२}{३}$ आणि $\frac{४}{५}$, असे दोन अपूर्णांक घेतले, आणि याप्रमाणें विचारिलें, कीं $\frac{४}{५}$ यांस अनेक समभागांत भागून, त्या अनेक भागांची बेरीज करून, $\frac{२}{३}$ हे उत्पन्न होतील कीं काय ? होतील, तर $\frac{४}{५}$, यांस किती समभागांत भागावें, आणि त्यांतून कितीकांची बेरीज घेतली पाहिजे ? या प्रश्नाचा उलगडण्यास $\frac{२}{३}$ यांस $\frac{४}{५}$ यांणीं भागणें असें ह्मणतात; आणि $\frac{४}{५}$ यांचे जे भाग केले आहेत ती भागसंख्या छेदस्थळीं, आणि त्या भागांतून जितके भाग घेतले, ती भागसंख्या अंशस्थळीं मांडल्यानें जो अपूर्णांक होतो, त्यास $\frac{२}{३}\div\frac{४}{५}$ यांचा भागाकार ह्मणतात. अशा प्रश्नाचें उलगडणें या पुढील प्रमाणें आहे; (१११) प्रमाणें या दोन अपूर्णांकांस समछेद कर, ह्मणजे (१०८) प्रमाणें त्यांची किंमत बदलत नाहीं; त्यांचीं रूपें तर $\frac{१०}{१५}$ आणि $\frac{१२}{१५}$ होतात. तर आतां प्रश्न हाच आहे, कीं $\frac{१२}{१५}$ यांस कांहीं समभागांत भागून, त्या भागांतून कांहीं भाग घेऊन, $\frac{१०}{१५}$ उत्पन्न करावे. १ यास १५ समभागांत भागून त्यांतून १२ घेतल्यानें $\frac{१२}{१५}$ उत्पन्न होतात, तर $\frac{१२}{१५}$ यांस १२ समभागांत

घेतले, तर $\frac{१०}{१५}$ उत्पन्न होतील. यामुळे, (१०८) प्रमाणें, $\frac{१०}{१५}$ किंवा $\frac{२}{३}$ यांस उत्पन्न करायासाठीं $\frac{१२}{१५}$ किंवा $\frac{४}{५}$ यांस १२ समभागांत भागून, त्यांतून १० घेतले पाहिजेत; ह्मणजे, $\frac{१०}{१२}$ हा भागाकार आहे. जर पूर्वींप्रमाणें $\frac{२}{३}$ यांस भाज्य, आणि $\frac{४}{५}$ यांस भाजक ह्मणतात, तर या पक्षांत भागाकार या पुढील रितीपासून निघतो, आणि लक्षांत येईल, कीं ही कल्पना सर्व दुसऱ्या पक्षांसहि लागू होईलः

भाज्याचा अंश गुणिला भाजकाचा छेद, याचे बरोबर भागाकाराचा अंश आहे. आणि भाज्याचा छेद गुणिला भाजकाचा अंश, याचे बरोबर भागाकाराचा छेद आहे. या दोन्हीं पक्षांत काय उत्तर यावें हें ताडून पाहिल्यानें ही रीति गुणाकाराचे रितीची उलट आहे हें लक्षांत येईल. $\frac{४}{५}$ यांस $\frac{१०}{१२}$ यांणीं गुणायाचें, तर या पुढील प्रमाणें प्रश्न होतो, जर $\frac{४}{५}$ याचे १२ भाग करून, त्यांतून १० भाग घेतले, तर एकंमाचा किती भाग घेतला आहे? याचें उत्तर $\frac{४०}{६०}$, किंवा $\frac{२}{३}$ आहे. पुनः, $\frac{२}{३}$ यांस $\frac{४}{५}$ यांणीं भागणें, तर या पुढीलप्रमाणें प्रश्न होतो, $\frac{२}{३}$ हे $\frac{४}{५}$ यांचा कोणता भाग आहे? याचें उत्तर $\frac{१०}{१२}$.

११२. ही रीति केव्हां केव्हां सुलभ करितां येईल, असें या पुढील उदाहरणापासून समजेल. $\frac{१६}{३३}$ यांस $\frac{२८}{१५}$ यांणीं भाग. पहा कीं १६ हे ४×४ आहेत, आणि २८ हे ४×७ आहेत; ३३ हे ३×११ आहेत, आणि १५ हे ३×५ आहेत; यामुळें ते दोन अपूर्णांक $\frac{४\times४}{३\times११}$ आणि $\frac{४\times७}{३\times५}$ या प्रमाणें आहेत, आणि रितीप्रमाणें त्यांचा भागाकार $\frac{४\times४\times३\times५}{३\times११\times४\times७}$ आहे, अंश आणि छेद या दोहोंतहि ३×४ आहेत. यावरून (१०८) प्रमाणें तो अपूर्णांक $\frac{४\times५}{११\times७}$, अथवा $\frac{२०}{७७}$ यांचे बरोबर आहे. यावरून वरचे कलमांतील रितींत या पुढीलप्रमाणें फेर करितां येतो; दोन अंश अथवा दोन छेद यांस जर साधारण भाजक असेल, तर त्याणें ते भागून भाज्यांचे स्थळीं भागाकार कामांत घ्यावे.

११३. अपूर्णांकास पूर्णांकानें भागते समयीं, जसें, $\frac{२}{३}$ यांस १५ नीं भागते समयीं, १५ हे $\frac{१५}{१}$ याप्रमाणें अपूर्णांक आहेत असें जाणावें. ह्मणजे रितीप्रमाणें $\frac{२}{४५}$ हा भागाकार येतो. यावरून अपूर्णांकास पूर्णांकानें भागायाचें असेल, तर अपूर्णांकाचे छेदास पूर्णांकानें गुणावें.



भाज्य.	भाजक.	भागाकार.
$\frac{४१}{३३}$	$\frac{६३}{११}$	$\frac{४१}{१८९}$
$\frac{४६७}{१५१}$	$\frac{९०७}{१०१}$	$\frac{४७१६७}{१३६९५७}$
$\frac{७८१३}{५०७१}$	$\frac{६०१}{११}$	$\frac{१३}{४६१}$

$\dfrac{\frac{१}{५}\times\frac{१}{५}\times\frac{१}{५}-\frac{२}{१७}\times\frac{२}{१७}\times\frac{२}{१७}}{\frac{१}{५}-\frac{२}{१७}}$, आणि $\dfrac{\frac{८}{११}\times\frac{८}{११}-\frac{३}{११}\times\frac{३}{११}}{\frac{८}{११}-\frac{३}{११}}$, यांचा किंमती काय?

उत्तरें, $\frac{५५९}{७२२५}$, आणि १.

कोणी पुरुष अ, एक शेत १२ दिवसांत कापितो, तेंच शेत ब, ६ दिवसांत कापितो, आणि क, तेंच शेत ४ दिवसांत कापितो; तर ते सगळे मिळून तें शेत किती दिवसांत कापितील?† उत्तर, २ दिवसांत.

एक टांक्यास ४ नळ आहेत, आणि ते प्रत्येक निरनिराळे सोडिले असतां १२,११,१०, आणि ९ तासांत तें टांकें भरितात, तर ते सगळे एकदांच सोडिले असतां किती काळांत भरतील? उत्तर, २ $\frac{४५४}{७६३}$ तास.

१२४. या अध्यायांतील मुख्य परिणाम बीजगणितानें या पुढीलप्रमाणें दाखवितां येईल; अ, ब, क, इत्यादि कोणत्याहि पूर्णांकांचे स्थळीं घेतले आहेत असें मनांत आण. तर

(१०७) प्रमाणें $\frac{अ}{ब}=\frac{१}{ब}\times अ$ (१०८) प्रमाणें $\frac{अ}{ब}=\frac{मअ}{मब}$

(१११) प्रमाणें $\frac{अ}{ब}$ आणि $\frac{क}{ड}$ हे - - - $\frac{अड}{बड}$ आणि $\frac{बक}{बड}$ याप्रमाणें आहेत

(११२) प्रमाणें $\frac{अ}{क}+\frac{ब}{क}=\frac{अ+ब}{क}$ $\frac{अ}{क}-\frac{ब}{क}=\frac{अ-ब}{क}$

(११३) प्रमाणें $\frac{अ}{ब}+\frac{क}{ड}=\frac{अड+बक}{बड}$ $\frac{अ}{ब}-\frac{क}{ड}=\frac{अड-बक}{बड}$

---

† हें आणि पुढील उदाहरणें करण्याची रीति याप्रमाणें आहे; प्रत्येक मनुष्य जितके दिवसांत शेत कापितो त्या दिवसांची संख्या जर दिली आहे, तर प्रत्येक मनुष्य त्या शेताचा किती भाग एक दिवसांत कापील हें काढितां येईल, आणि त्यावरून सगळे मिळून एक दिवसांत किती कापितील हें कळेल; नंतर, तें सर्व काम करण्यास त्या सर्व मनुष्यांस किती दिवस लागतील हें काढितां येईल.

अथवा $\frac{\frac{अ}{ब}}{\frac{क}{ड}} = \frac{अड}{बक}$

१२५. जरीं अक्षरें अपूर्णांकांचे जागीं घेतलीं तरी, हीं वरचीं उत्तरें खरीं आहेत. उदाहरण, $\frac{\frac{अ}{ब}}{\frac{क}{ड}}$ हा अपूर्णांक घे, याचे अंश आणि छेद अपूर्णांक आहेत, आणि त्यांस $\frac{इ}{फ}$ या अपूर्णांकानें गुण, त्यापासून $\frac{\frac{अइ}{बफ}}{\frac{कइ}{डफ}}$ असें होतें, हें (१२१) प्रमाणें $\frac{अइडफ}{बफकइ}$ आहे, याचे अंश आणि छेद यांस (१०८) प्रमाणें इफ यांणीं भागिलें असतां, $\frac{अड}{बक}$ होतो. परंतु मुळचा अपूर्णांक $\frac{अड}{बक}$ आहे; यावरून $\frac{\frac{अ}{ब}}{\frac{क}{ड}} = \frac{\frac{अ}{ब}\times\frac{इ}{फ}}{\frac{क}{ड}\times\frac{इ}{फ}}$ हें (१२४) कलमांतील दुसऱ्या सारणीस† मिळतें आहे. त्याचप्रमाणें जेव्हां अक्षरें अपूर्णांकांचे ठिकाणीं घेतलीं आहेत, अथवा तीं काढून त्यांचे जागीं अपूर्णांक मांडिले आहेत, तेव्हां (१२४) कलमांतील बाकीचा दुसऱ्या सारणी खऱ्या आहेत असें दाखवितां येईल. जा सर्व सारिणी या पुस्तकांत सिद्ध केल्या आहेत, त्या जेव्हां पूर्णांकांचे ठिकाणीं अपूर्णांक लिहितात, तेव्हांहि तशाच खऱ्या आहेत. उदाहरण, (५४) कलमांत, (म+न)अ=मअ+नअ. आतां म, न, आणि अ, हे अनुक्रमानें $\frac{प}{क}$, $\frac{र}{स}$, आणि $\frac{व}{क}$ याप्रमाणें अपूर्णांक आहेत असें मनांत आण. तर म+न, हे $\frac{प}{क}+\frac{र}{स}$, अथवा $\frac{पस+कर}{कस}$ आहेत, आणि (म+न)अ, हे $\frac{पस+कर}{कस}\times\frac{व}{क}$, अथवा $\frac{(पस+कर)व}{कसक}$ अथवा $\frac{पसव+करव}{कसक}$ आहेत. परंतु हे (११२) प्रमाणें $\frac{पसव}{कसक}+\frac{करव}{कसक}$ आहेत, हे $\frac{पव}{कक}+\frac{रव}{सक}$ यांचे बरोबर आहेत, कां कीं (१०८) प्रमाणें $\frac{पसव}{कसक}=\frac{पव}{कक}$, आणि $\frac{करव}{कसक}=\frac{रव}{सक}$. परंतु $\frac{पव}{कक}=\frac{प}{क}\times\frac{व}{क}$ आणि $\frac{रव}{सक}=\frac{र}{स}\times\frac{व}{क}$. यामुळें (म+न)अ, अथवा $(\frac{प}{क}+\frac{र}{स})\frac{व}{क}=\frac{प}{क}\times\frac{व}{क}+\frac{र}{स}\times\frac{व}{क}$. याचप्रमाणें बाकीचा सारणींविषयीं हीच गोष्ट सिद्ध करितां येईल.

---

† जी बीजरूप पद्धती वारंवार कामांत येती तीस सारणी असें नाव दिलें आहे.

$$\frac{\frac{अ}{ब}\times\frac{क}{ड}+\frac{इ}{फ}\times\frac{ग}{ह}}{\frac{अ}{ब}\times\frac{इ}{फ}+\frac{क}{ड}\times\frac{ग}{ह}}=\frac{अकफह+बडइग}{अइडह+बकफग}$$

$$\frac{१}{अ+\frac{१}{ब}}=\frac{ब}{अब+१}$$

$$\frac{१}{अ+\frac{१}{ब+\frac{१}{क}}}=\frac{१}{अ+\frac{क}{बक+१}}=\frac{बक+१}{अबक+अ+क}$$

जसें $$\frac{१}{६+\frac{१}{७+\frac{१}{८}}}=\frac{१}{६+\frac{८}{५७}}=\frac{५७}{३५०}$$

जा रिती सर्व अंकांविषयीं खऱ्या अशा सिद्ध केल्या आहेत, त्या जेव्हां अंकांचा जागीं अक्षरें घेतलीं असतील, तेव्हां लागू करितां येतील.

सहावा भाग.

दशांश अपूर्णांक.

१२६. अपूर्णांकांचा मोठेपणा ताडून पडण्याकरितां, त्या अपूर्णांकांस समछेद करावे लागतात, हें (२१२) आणि (१२१) कलमांत पाहिलें. अपूर्णांकांस निरनिराळे छेद असतां, त्यांशीं कृति करितां येती त्यापेक्षां त्यांस समछेद केल्यावर त्यांशीं कृति, किती त्वरित होती हेंहि वर पाहिलें. या कारणावरून जा जा गणिताचा भागांत अपूर्णांकांची गरज लागती, त्या ठिकाणीं जा अपूर्णांकांस समछेद आहेत, अथवा जांस समछेदरूप लवकर देतां येईल, त्याशिवाय दुसरे अपूर्णांक कामांत घेत नाहींत, असी चाल पडून गेली आहे. आतां, सर्व अंकांतून जांशीं कृति करायास सोपें पडतें, ते अंक १ यावर शून्यें असे असतात, जसें १०,१००, १०००, इत्यादि. या अंकांस **दशगुणक**

सतो, त्यास **दशांश अपूर्णांक** ह्मणतात, अथवा सामान्यतः **दशांश** ह्मणतात.

१२७. पूर्णांकास दशांश अपूर्णांकाचें रूप, अथवा दशांश अपूर्णांकास दुसऱ्या दशांश अपूर्णांकाचें रूप, सहज रितीनें देतां येईल. उदाहरण, (१०६) प्रमाणें, ९४ हे $\frac{९४०}{१०}$ अथवा $\frac{९४००}{१००}$, $\frac{९४०००}{१०००}$ इत्यादि आहेत; आणि (१०८) प्रमाणें, $\frac{३}{१०}$ हे $\frac{३०}{१००}$, अथवा $\frac{३००}{१०००}$, अथवा $\frac{३०००}{१००००}$ इत्यादि आहेत. (५७) प्रमाणें कोणत्येहि संख्येचे उजव्ये बाजूस एक शून्य मांडणें, हें आणि त्या संख्येस १० नीं गुणणें हें सारिखेंच आहे, आणि (१०८) कलमाप्रमाणें याच रितीनें कोणत्याहि अपूर्णांकाचे अंश जितके वेळा १० नीं गुणावे, तितकेच वेळा १० नीं त्याचे छेदहि गुणावे.

१२८. या नंतर असा प्रश्न उत्पन्न होतो, कीं जो अपूर्णांक दशांश नाहीं, त्यास किमत बदलल्यावांचून दशांशाचें रूप कसें द्यावें? उदाहरणासाठीं $\frac{७}{१६}$ अपूर्णांक घे, त्याचे अंश आणि छेद क्रमानें १०,१००, १०००, इत्यादि यांणीं गुणून, $\frac{७०}{१६०}$, $\frac{७००}{१६००}$, $\frac{७०००}{१६०००}$, $\frac{७००००}{१६००००}$, असे अपूर्णांक होतील, आणि त्यांतून प्रत्येक (१०८) प्रमाणें $\frac{७}{१६}$ यांचे बरोबर आहे. या प्रत्येक अपूर्णांकाचा छेद १६ यांणीं निःशेष भागिला जातो, आणि त्यापासून जे वेगळाले भागाकार येतात, ते हे पुढील दशगुणक अंक आहेत, ह्मणजे, १०,१००,१०००,१००००, इत्यादि. यामुळें त्या अपूर्णांकातील कोणत्याहि एकाचा अंश १६ यांणीं निःशेष भागिला जातो, तर त्याच अंशाचे अपूर्णांकाचा अंश आणि छेद हे दोन्हीं १६ नीं निःशेष भागिले जातील. असा भागाकार केल्यावर (१०८) प्रमाणें अपूर्णांकाची किमत बदलल्यावांचून, दुसरा एक अपूर्णांक निघेल, ज्याचा छेद या पुढील एकादा दशगुणक अंक होईल, ह्मणजे, १०,१००,१०००, इत्यादि. आणि त्याची किमत $\frac{७}{१६}$ यांचे बरोबर होईल. आतां, ७०,७००,७०००,७००००, इत्यादि यांतून कोणता पहिल्यानें १६ यांणीं निःशेष भागिला जातो हें शोधायाचें राहिलें.

१६)७०(४	१६)७००(४३	१६)७०००(४३७	१६)७००००(४३७५
६४	६४	६४	६४
६	६०	६०	६०
	४८	४८	४८
	१२	१२०	१२०
		११२	११२
		८	८०
			८०
			०

तर, असें दिसतें, कीं ७०००० हे त्या अंशांतून पहिल्यानें १६ यांणीं निःशेष भागिले जातात. परंतु वरचा प्रत्येक भागाकार मांडण्याचें प्रयोजन नाहीं, कां कीं शेवटल्या भागाकारांत सर्व पूर्वीचे भागाकार आले आहेत हें स्पष्ट आहे. तर शून्यांची संख्या अनंत आहे असें मानून, कृति चालवावी, आणि जेव्हां बाकी शून्य राहील तेव्हां थांबावें, आणि जितकीं शून्यें कामांत घेतलीं असतील, तीं मोजावीं. या पक्षांत, ७०००० हे १६×४३७५ आहेत, तर $\frac{७००००}{१६००००}$ हा $\frac{१६\times४३७५}{१६\times१००००}$, अथवा $\frac{४३७५}{१००००}$ हा इच्छिला अपूर्णांक होईल.

यामुळें, अपूर्णांकास दशांस अपूर्णांकाचें रूप देण्यासाठीं, अंशाचे उजव्येकडे शून्यें मांडून, बाकी न राही तोंपर्यंत छेदानें भाग. जो भागाकार येईल तो इच्छिलेल्या अपूर्णांकाचा अंश होईल, आणि भागाकार करायासाठीं जितकीं शून्यें कामांत आणिलीं असतील, तितकीं शून्यें १ याचे उजव्येकडे मांडिल्यानें इच्छिलेल्या अपूर्णांकाचा छेद होईल.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

या पुढील अपूर्णांकास दशांस अपूर्णांकाचें रूप दे.

$\frac{१}{२}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{२}{२५}$, $\frac{१}{५०}$, $\frac{३९२७}{१२५०}$, आणि $\frac{४५३}{६२५}$.

उत्तर. $\frac{५}{१०}$, $\frac{२५}{१००}$, $\frac{८}{१००}$, $\frac{२}{१००}$, $\frac{३१४१६}{१००००}$, आणि $\frac{७२४८}{१००००}$.

१२९. बहुतकरून असे पक्ष असतात, कीं शून्यें मांडिल्यानें अपू-

र्णांकाचा अंश कधींहि छेदानें निःशेष भागितां येत नाहीं. उदाहरण, $\frac{१}{७}$ यास दशांश अपूर्णांकाचें रूप देऊन पहा.

$$७)१०००००००००००००००००००, \quad इत्यादि.$$
$$१४२८५७१४२८५७१४२८५७, \quad इत्यादि.$$

एथें भागाकारांत १,४,२,८,५,७, हे अंक क्रमानें पुनः पुनः येतात; यामुळें $\frac{१}{७}$ यास दशांश अपूर्णांकाचें रूप देतां येत नाहीं. तथापि भागाकारांतून १४२८५७१४२८५७, इत्यादि अनेक संख्या अंशाचेस्थळीं घेतल्या, आणि इतकाच भागाकार करायासाठीं जितकीं शून्यें कामांत आणिलीं, तितकीं १ चे उजव्येकडे मांडून, तीं छेदस्थळीं माडिलीं, तर $\frac{१}{७}$ चे फार थोड्ये अंतरानें एक अपूर्णांक मिळेल, आणि अंशाचेस्थळीं अधिक अंक घेतले, आणि छेदाचेस्थळीं अधिक शून्यें घेतलीं, तर अंतर पूर्वीपेक्षां कमी होईल.

जसें, $\frac{१}{१०}$ हे $\frac{१}{७}$ पेक्षां $\frac{३}{७०}$ (इतक्यानें कमी आहेत.) परंतु $\frac{३}{७०}$ हे $\frac{१}{१०}$
$\frac{१४}{१००}$ हे $\frac{१}{७}$ . . . . $\frac{२}{७००}$ . . . . $\frac{२}{७००}$ हे $\frac{१}{१००}$
$\frac{१४२}{१०००}$ हे $\frac{१}{७}$ . . . . $\frac{६}{७०००}$ . . . . $\frac{६}{७०००}$ हे $\frac{१}{१०००}$
$\frac{१४२८}{१००००}$ हे $\frac{१}{७}$ . . . . $\frac{४}{७००००}$ . . . . $\frac{४}{७००००}$ हे $\frac{१}{१००००}$
$\frac{१४२८५}{१०००००}$ हे $\frac{१}{७}$ . . . . $\frac{५}{७०००००}$ . . . . $\frac{५}{७०००७०}$ हे $\frac{१}{१०००००}$
$\frac{१४२८५७}{१००००००}$ हे $\frac{१}{७}$ . . . . $\frac{१}{७००००००}$ . . . . $\frac{१}{७००००००}$ हे $\frac{१}{१००००००}$
(यांचे बरोबर नाहीत.)

इत्यादि. इत्यादि. इत्यादि. इत्यादि.

पहिल्या उभ्या ओळींत दशांश अपूर्णांक आहेत, आणि ते $\frac{१}{७}$ चे जवळ जवळ येतात, असें तिसऱ्ये ओळीवरून दिसतें. यामुळें $\frac{१}{७}$ याचे केवळ बरोबरीचा दशांश अपूर्णांक जरी काढितां येत नाहीं, तथापि त्याशीं हव्या तितक्या लहान अंतरानें भिन्न असा अपूर्णांक काढितां येईल.

ही गोष्ट या पुढीलप्रमाणें दाखवितां येती; $\frac{१}{७}$ यास एकमाचे एक दशलक्षांशा इतकी चूक न येतां दशांश अपूर्णांकाचें रूप द्यावयाचें आहे

त्या दाहास ७ यांणीं भाग; ह्मणजे याप्रमाणें होईल

$$\frac{१}{७}=\frac{१००००००}{७००००००}=\frac{१४२८५७\frac{१}{७}}{१००००००}$$

जर अंशांतील $\frac{१}{७}$ हा अपूर्णांक सोडून दिला, तर जें परिमाण सोडून दिलें, तें वास्तवीक एकंमाचा एक दशलक्षांशाचा ७ वा भाग आहे; अथवा एकंमाचा एकदशलक्षांशापेक्षां तें परिमाण कमी आहे. यामुळें $\frac{१४२८५७}{१००००००}$ हा इच्छिला अपूर्णांक आहे.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

$\frac{३}{९१}$, $\frac{१७}{१४३}$ आणि $\frac{१}{२४७}$, या अपूर्णांकांचे मागीलप्रमाणें कोष्टक कर.

$\frac{३}{९१}$ { याचे भागाकारांत हे पुढील पुनः पुनः येणारे अंक आहेत, } ३२९६७०,३२९६७०, इत्यादि,

$\frac{१७}{१४३}$ . . . . ११८८८१,११८८८१, ...

$\frac{१}{२४७}$ . . . . { ४०४८५८२९९५९५१४१७०० / ४०४८५८२९९५९५१४१७०० } इत्यादि.

१३०. भागाकारांत वरप्रमाणें क्रमाक्रमानें अंकांचे पुनःपुनः येण्याचें कारण हेंच आहे; जर १.०००, इत्यादि अंकांस २४७ यांणीं भागिलें, तर भागाकार करितानां जी प्रत्येक बाकी येती, ती २४७ पेक्षां कमी आहे, ह्मणून ती बाकी ० किंवा २४६ यांचे मागला कोणताहि अंक येईल. यावरून, जर बाकी कधींहि ० होत नाहीं, तर भागाकार हवा तितका चालविल्यानें, एकादी बाकी पुनः दुसरे वेळीं येईल. मनांत आण, कीं पहिल्या सगळ्या २४६ बाक्या केवळ निरनिराळ्या आहेत, ह्मणजे, त्या १,२,३, इत्यादिपासून २४६ पावेतों आहेत, आणि त्यांचा क्रम बरोबर नाहीं. २४७ वी बाकी २४७ यांचे बरोबर येत नाहीं, यामुळें जा बाक्या पूर्वीं आल्या, त्यांतून एकादीचे बरोबर २४७वी बाकी होईल, तर जा ठिकाणची बाकी कांहीं पूर्वींचे बाकी बरोबर येती, त्या ठिकाणापासून भागाकारांतील पूर्वींचे अंक क्रमानें पुनःपुनः येतील, हें स्पष्ट आहे.

१३१. जर बहुतेक अपूर्णांकांस दशांशांचें रूप देतां येत नाहीं, तर दशांश अपूर्णांकांचा उपयोग काय, असा प्रश्न फारकरून उत्पन्न होईल? त्यास उत्तर हेंच आहे; कीं व्यवहारी अपूर्णांकांची मिळवणी, वजाबाकी, गुणाकार, आणि भागाकार, करण्याचा रितींपेक्षां दशांशांची, मिळ-

वणी, वजाबाकी, गुणाकार, भागाकार करण्याचा रिती फार सोप्या आहेत; आणि जरी सर्व व्यवहारी अपूर्णांकांस दशांशाचें रूप देतां येत नाहीं, तथापि त्या प्रत्येक अपूर्णांकांचे जवळ जवळ असे दशांश अपूर्णांक काढितां येतात, आणि व्यवहारी अपूर्णांकांचे स्थळीं हे दशांश अपूर्णांक घेतल्यानें जी कांहीं चूक होती, ती लक्षांत घेण्याजोगी नसती. उदाहरण, मनांत आण, कीं एक इंचास एक कोटी समभागांत भागिला आहे, तर त्यांतील एक भाग डोळ्यांनीं दिसणार नाहीं. यामुळें सूक्ष्म मानाची जरी गरज असली, तरी लांबी मोजण्यांत इंचाचा कोट्यांशाची चूक असली तरी कांहीं चिंता नाहीं. आतां, (१२९) कलमांतील कोष्टक वाढविल्यानें $\frac{१४२८५७१}{१००००००००}$ हा अपूर्णांक $\frac{१}{७}$ पेक्षां $\frac{१}{१००००००००}$ इतक्यानें भिन्न नाहीं; आणि जर हे दोन अपूर्णांक इंचाचे भाग दाखवितात, आणि त्यांचें अंतर अतिलहान, दिसण्या जोगें नाहीं, ह्मणून पहिला अपूर्णांक दुसऱ्याचे जागीं घेतां येईल. व्यवहार कामांत अंकगणित लाविलें असतां, कांहीं चुकी वांचून कोणताहि पदार्थ केवळ बरोबर असा मोजतां येत नाहीं, तो पदार्थ लांबी, वजन, किंवा दुसरी कांहीं महत्वाची जात असो. यामुळें दशांश अपूर्णांकांशिवाय दुसरे कांहीं जातीचे अपूर्णांक कामांत घेण्याचें प्रयोजन नाहीं; कां कीं दुसऱ्या कांहीं रितीनें एकादें परिमाण जितकें चुकी वांचून दाखवितां येतें, त्याच प्रमाणें दशांशानें चुकी वांचून दाखवितां येईल.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

या पुढील अपूर्णांकांहून, $\frac{१}{१०००००००००}$ इतक्यानें भिन्न नाहींत असे दशांश अपूर्णांक काढ.

$\frac{१}{३}$ . . उत्तर $\frac{३३३३३३३३}{१००००००००}$. $\frac{११३}{३५५}$. . उत्तर $\frac{३१८३०९८५}{१००००००००}$.

$\frac{४}{७}$. . उत्तर $\frac{५७१४२८५७}{१००००००००}$. $\frac{३५५}{११३}$. . उत्तर $\frac{३१४१५९२९२}{१००००००००}$.

१३२. प्रत्येक दशांशास असें रूप देतां येईल, कीं त्यांत एकादा पूर्णांक आणि कांहीं सरळ दशांश येतील, अथवा नुसते सरळ दशांश येतील, आणि त्या प्रत्येक दशांशाचा अंशाचा ठिकाणीं केवळ एक अंक येईल. उदाहरण, $\frac{१४७३२६}{१०००}$ हा अपूर्णांक घे. (११५) प्रमाणें $\frac{१४७३२६}{१०००}$ हे १४७ $\frac{३२६}{१०००}$ आहेत; आणि ३२६ हे ३००, आणि २०, आणि ६, यांचे बरोबर आहेत; (१२२) प्रमाणें $\frac{३२६}{१०००}=\frac{३००}{१०००}+\frac{२०}{१०००}+$

$\frac{६}{१०००}$ परंतु (१०८) प्रमाणें $\frac{३००}{१०००}$ हे $\frac{३}{१०}$ आहेत, आणि $\frac{२०}{१०००}$ हे $\frac{२}{१००}$ आहेत. यामुळें $\frac{१४७३२६}{१०००}$ हे $१४७+\frac{३}{१०}+\frac{२}{१००}+\frac{६}{१०००}$ आहेत. आतां, कोणतीहि दुसरी संख्या घे, जसें १४७३२६ हे अंक घे, आणि कांहीं अपूर्णांक कर जांचे अंशस्थळीं ही संख्या असेल, आणि त्यांचे छेदस्थळीं १,१०,१००,१०००,१००००, इत्यादि येतील, आणि पूर्वीं सांगितल्याप्रमाणें त्या अपूर्णांकांस पूर्णांक आणि सरळ दशांश अपूर्णांकांचें रूप दे, असें केल्यानें हा पुढील कोष्टक उत्पन्न होईल.

दशांश अपूर्णांकांचें पृथक्करण.

$\frac{१४७३२६}{१} = १४७३२६$

$\frac{१४७३२६}{१०} = १४७३२+\frac{६}{१०}$

$\frac{१४७३२६}{१००} = १४७३+\frac{२}{१०}+\frac{६}{१००}$

$\frac{१४७३२६}{१०००} = १४७+\frac{३}{१०}+\frac{२}{१००}+\frac{६}{१०००}$

$\frac{१४७३२६}{१००००} = १४+\frac{७}{१०}+\frac{३}{१००}+\frac{२}{१०००}+\frac{६}{१००००}$

$\frac{१४७३२६}{१०००००} = १+\frac{४}{१०}+\frac{७}{१००}+\frac{३}{१०००}+\frac{२}{१००००}+\frac{६}{१०००००}$

$\frac{१४७३२६}{१००००००} = \frac{१}{१०}+\frac{४}{१००}+\frac{७}{१०००}+\frac{३}{१००००}+\frac{२}{१०००००}+\frac{६}{१००००००}$



वरचा कोष्टक शिकणारानें आपणच लिहावा, नंतर या पुढील उदाहरणांपासून दुसरें कोष्टक करावे.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

या पुढील अपूर्णांकांस पूर्णांक, आणि अधिक सरळ अपूर्णांक रूप दे;

$\frac{३१४१५९२६}{१०}$, $\frac{३१४१५९२६}{१००}$, इत्यादि.

$\frac{२७०००३१}{१०}$, $\frac{२७०००३१}{१००}$, इत्यादि.

$\frac{२०७३०००}{१०}$, $\frac{२०७३०००}{१००}$, इत्यादि.

$\frac{३३३१३०३}{१०००}$, $\frac{३३३१३०३}{१००००}$, इत्यादि.

१३३. वरचे कोष्टकांत, आणि त्या सारिख्याच दुसऱ्या केलेल्या कोष्टकांत, जा अपूर्णांकांपासून पूर्णांक येतात, त्यांस पाहिलें असतां, असें दिसेल, कीं, ते याप्रमाणें मांडितां येतील; अपूर्णांकाचे छेदस्थळीं जितकीं शून्यें आहेत, तितके अंशाचे उजव्ये कडील अंक बिंदूनें, किंवा दुसऱ्ये कांहीं खुणेनें वेगळे कर. तर

जेव्हां अपूर्णांक $\frac{१४७३२६}{१०}$ आहे, तेव्हां १४७३२·६ याप्रमाणें होईल

- - - - - - $\frac{१४७३२६}{१००}$ - - - - - - - - १४७३·२६ - - - - - -

- - - - - - $\frac{१४७३२६}{१०००}$ - - - - - - - - १४७·३२६ - - - - - -

- - - - - - इत्यादि. - - - - - - - - - इत्यादि. - - - - - -

अपूर्णांकापासून जे पूर्णांक निघतात, ते बिंदूचे डाव्येकडचे अंक आहेत. बिंदूचे उजव्ये कडचा पहिला अंक, तो अशा अपूर्णांकाचा अंश आहे, जाचा छेद १० आहे, तसें उजव्येकडचा दुसरा अंक, तो अशा अपूर्णांकाचा अंश आहे, जाचा छेद १०० आहे, आणि इत्यादि. जा अपूर्णांकापासून पूर्णांक निघत नाहीं त्यांविषयीं आतां विचार करितों.

१३४. $\frac{१४७३२६}{१००००००}$ हा अपूर्णांक घे, यांत छेदस्थळीं जितकीं शून्यें आहेत, तितकेच अंशस्थळीं अंक आहेत. वर सांगीतल्या रितीप्रमाणें

अंशाचे सर्व अंकांपूर्वी बिंदू मांडून त्यांस जर वेगळें केलें, जसें, ·१४७३२६, तर (१३३) कलमांत जें सांगितलें तें येथें लागू होतें; कां कीं, $\frac{१४७३२६}{१००००००}$ यास वरचे कोष्टकांत पाहून, तो पुढील प्रमाणें आहे असें दिसेल,

$$\frac{१}{१०}+\frac{४}{१००}+\frac{७}{१०००}+\frac{३}{१००००}+\frac{२}{१०००००}+\frac{६}{१००००००}$$

$\frac{१४७३२६}{१००००००००}$ हा दुसरा अपूर्णांक घे; वरचे कोष्टकावरून तो याप्रमाणें आहे,

$$\frac{१}{१००}+\frac{४}{१०००}+\frac{७}{१००००}+\frac{३}{१०००००}+\frac{२}{१००००००}+\frac{६}{१००००००००}$$

या उदाहरणांत १ यास १० यांणीं भागिलें नाहीं, परंतु १०० नीं भागिलें आहे; यामुळें, जर सर्व अंशांकांचे पूर्वींच बिंदू मांडिला, तर वरची रीति खरी नाहीं, कां कीं बिंदूचे उजव्येकडील पहिल्ये अंकाचा जो छेद, तो रितीप्रमाणें दुसऱ्ये स्थळींचा असावा, तसा दुसऱ्या स्थळींचा जो छेद, तो तिसऱ्या स्थळीं असावा, आणि याप्रमाणें पुढें. तर या पक्षांत वरची रीति लागू करायासाठीं, असी योजना केली पाहिजे, कीं १ हा बिंदूचे उजव्येकडचा दुसऱ्ये स्थळीं येईल. ह्मणजे १ आणि बिंदू यांचे मध्यें शून्य मांडिल्यानें असें होईल, जसें, ·०१४७३२६. हें खरें आहे, कां कीं वरचा रितीप्रमाणें यांस मांडिलें असतां याप्रमाणें होईल,

$$\frac{०}{१०}+\frac{१}{१००}+\frac{४}{१०००}+\frac{७}{१००००}+\frac{३}{१०००००}+\frac{२}{१००००००}+\frac{६}{१००००००००}$$

आतां हें तर वरचे प्रमाणेंच आहे, कां कीं $\frac{०}{१०}$ बरोबर ० आहे, ह्मणून तें पद कामांत आणण्याचें प्रयोजन नाहीं.

याचप्रमाणें, जर अंशस्थळींचे अंकांपेक्षां छेदस्थळीं दोन शून्यें अधिक असतील, तर बिंदू आणि अंशांतील पहिला अंक यांमध्यें दोन शून्यें मांडिल्यानें वरची रीति खरी लागू होईल. यामुळें विस्तारानें रीति, सांगीतली असतां, ती या पुढीलप्रमाणें आहे;

कोणत्याहि दशांश अपूर्णांकास, पूर्णांक आणि अधिक सरळदशां-

शाचें रूप देण्यासाठीं, किंवा जा अपूर्णांकांत पूर्णांक नसेल त्यास सरळ दशांशरूप देण्यासाठीं, छेदांत जितकीं शून्यें आहेत, तितके अंक अंशांतून बिंदूनें वेगळे कर. असें करायास अंशांतील अंक पुरत नाहींत, तर जितकीं स्थळें कमी आहेत, तीं भरायासाठीं डाव्येकडे शून्यें मांडून त्या शून्यांचे पूर्वीं बिंदू कर. असें केल्यावर बिंदूचे डाव्येकडेस जे अंक येतात, ते सांगितल्ये अपूर्णांकांतील **पूर्णांक** आहेत. बिंदूचे उजव्येकडे पहिला अंक जाचा छेद १० आहे, दुसरा अंक जाचा छेद १०० आहे, आणि इत्यादि, जे अंक आहेत ते सांगितल्या अपूर्णांकाचे **अपूर्णांक** आहेत.

१३५. दशांश अपूर्णांकांस विस्तारानें लिहिण्याची चाल नाहीं. छेदामध्यें जितकीं शून्यें येतात, तितकीं स्थळें अंशांकांतून बिंदूनें वेगळीं करायास सोईस पडतें. जेव्हां छेदस्थळींचीं शून्यें, अंशस्थळींचे अंकांपेक्षां अधिक आहेत, तेव्हां अंशाचीं अंकस्थळें जितकीं कमी आहेत, तितकीं शून्यें त्यांचे डाव्येकडेस मांडून, शून्यांचे पूर्वीं बिंदू मांडितात. जसें, $\frac{७}{१०}$ यास ·७, आणि $\frac{७}{१००}$ यास ·०७ याप्रमाणें मांडितात. हें सर्व अंकलेखन या पुढील कोष्टकावरून एकदांच कळेल, आणि पहिल्ये भागांत जें दशकं अंकलेखन सांगितलें, त्यांशीं हें वरचें लेखन जो संबंध ठेवितें तोहि कळेल. पूर्णांकाचे एकं स्थळींचा अंकाचे उजव्ये बाजूस जे जे अंक येतात, ते क्रमानें एकं **भागिले** १०,१००,१००० इत्यादि आहेत, परंतु त्याचे डाव्येकडचे अंक एकं गुणिलें, १०,१००, १०००, इत्यादि आहेत, असें पाहाण्यांत येईल.

शिकणारानें एथें दाखविल्याप्रमाणें दशांशाचा बिंदू अंकांचे डोक्याबरोबर अथवा मध्यें संभाळून मांडावा, खालीं मांडू नये, कां कीं पुढचा बिजादि मोठ्या गणितामध्यें दोन अंकांचा किंवा अक्षरांचा गुणाकार दाखवायासाठीं, त्यांचे मध्यें खालचे आंगास बिंदू मांडितात जसें, १५.१६, अ.ब, अ+ब.क+ड, एथें या संख्यांचा किंवा अक्षरांचा गुणाकार तो बिंदू दाखवितो.

पहिला कोष्टक.

१२३·४ हे ..... $\frac{१२३४}{१०}$ अथवा $१२३\frac{४}{१०}$ अथवा $१२३+\frac{४}{१०}$ यांचे जागीं आहेत.

१२·३४ ..... $\frac{१२३४}{१००}$ .... $१२\frac{३४}{१००}$ ... $१२+\frac{३}{१०}+\frac{४}{१००}$ ....

१·२३४ ..... $\frac{१२३४}{१०००}$ ... $१\frac{२३४}{१०००}$ ... $१+\frac{२}{१०}+\frac{३}{१००}+\frac{४}{१०००}$ ....

·१२३४ ... $\frac{१२३४}{१००००}$ .... $+\frac{१}{१०}+\frac{२}{१००}+\frac{३}{१०००}+\frac{४}{१००००}$ ....

·०१२३४ .. $\frac{१२३४}{१०००००}$ .... $+\frac{१}{१००}+\frac{२}{१०००}+\frac{३}{१००००}+\frac{४}{१०००००}$ ....

·००१२३४ · $\frac{१२३४}{१००००००}$ .... $\frac{१}{१०००}+\frac{२}{१००००}+\frac{३}{१०००००}+\frac{४}{१००००००}$ ...

दुसरा कोष्टक

·०१००३ .... $\frac{१००३}{१०००००}$ अथवा $\frac{१}{१००}+\frac{३}{१०००००}$

·१००३ ----- $\frac{१००३}{१००००}$ ---- $\frac{१}{१०}+\frac{३}{१००००}$

१०·०३ ------- $\frac{१००३}{१००}$ ---- $१०+\frac{३}{१००}$

१००·३ --------- $\frac{१००३}{१०}$ ---- $१००+\frac{३}{१०}$

यांचे जागीं आहेत.

तिसरा कोष्टक.

$·१२८३= \frac{१}{१०} + \frac{२}{१००} + \frac{८}{१०००} + \frac{३}{१००००}$

= ·१ +·०२=·००८+·०००३

= ·१ +·०२८३= ·१२+·००८३

= ·१२८ + ·०००३=·१०८+·०२०३

=·१००३+ ·०२८=·१२०३+·००८

चवथा कोष्टक. १२३४·५६७८९ इतके इंच आहेत, तर यांत

१ हा	१००० इंच आहेत	
२ हे	२००	------
३ हे	३०	------
४ हे	४	------
५ हे	$\frac{५}{१०}$	इंचाचे
६ हे	$\frac{६}{१००}$	------
७ हे	$\frac{७}{१०००}$	------
८ हे	$\frac{८}{१००००}$	------
९ हे	$\frac{९}{१०००००}$	------

१३६. (१०) व्ये कलमांत जें शून्यांपासून कार्य होतें, तेंच कार्य दशांश बिंदूचे उजव्येबाजूचे शून्यांपासून होतें. तीं शून्यें गणनेंत येत नाहींत, परंतु त्यांचा योगानें त्यांचे उजव्येकडे जे अंक येतात त्या अंकांचींस्थळें दाखवितां येतात. पहिल्या भागांत उभ्या ओळी करून त्यांत जसे अंक मांडिले आहेत, त्याप्रमाणें एथें मांडिलें असतां तीं शून्यें सोडून देतां येतील. जा अंकांशीं तीं शून्यें लागलेलीं असतात, त्यांपासून तीं वेमळीं आहेत हें जाणायासाठीं, त्या अंकांस अर्थ बोधक अंक ह्मणतात; जसें, ·०००३७४७ हे सात अंकस्थळांचे दशांश आहेत, आणि त्यांत चार अर्थ बोधक अंक आहेत; ·३४६ हे तीन स्थळांचे दशांश आहेत, आणि त्यांत तीन अर्थ बोधक अंक आहेत, इत्यादि.

१३७. दशांशाचे उजव्ये बाजूस कितीहि शून्यें मांडिलीं तरी त्याची किंमत बदलत नाहीं. उदाहरण, ·३ आणि ·३०० हे घे. (१३५) प्रमाणें यांत पहिला $\frac{३}{१०}$ आहे, आणि दुसरा $\frac{३००}{१०००}$ आहे, आणि पहिल्याचे अंश आणि छेद १०० यांणीं गुणून दुसरा झाला आहे, ह्मणजे (१०८) प्रमाणें हीं सारखींच परिमाणें आहेत.

१३८. दोन अपूर्णांकांस समछेद करायासाठीं, जांत अंकांचीस्थळें थोडीं आहेत त्याजवर इतकीं शून्यें मांडावीं, कीं दोन्हीं अपूर्णांकांचीं अंकस्थळें बरोबर होतील. उदाहरण, ·५४ आणि ४·३२९७ हे घे. यांतून पहिला $\frac{५४}{१००}$, आणि दुसरा $\frac{४३२९७}{१००००}$ आहे. (१०८) प्रमाणें पहिल्याचे अंश आणि छेद १०० यांणीं गुण, यावरून तो $\frac{५४००}{१००००}$ होतो; आणि त्याचा छेद, $\frac{४३२९७}{१००००}$ याचे छेदाबरोबर होतो. परंतु (१३५)

प्रमाणें $\frac{५४००}{१०००}$ हा ·५४०० आहे. दशांश चिन्ह पूर्णांकांचे उजव्येकडेस मांडिलें पाहिजे; जसें, १२९ हे १२९· याप्रमाणें मांडिले पाहिजेत. परंतु असे पक्षांत दशांश चिन्ह बहुतकरून मांडीत नाहीं; तथापि लक्षांत ठेविलें पाहिजे, कीं १२९ आणि १२९·००० यांची किंमत सारिखीच आहे, कां कीं यांतून पहिले १२९ आहेत, आणि दुसरे $\frac{१२९०००}{१०००}$ आहेत.

१३९. मिळवणी, वजाबाकी, गुणाकार, आणि भागाकार, यांचा रिती जा मागील अध्यायांत सांगीतल्या, त्या सर्व अपूर्णांकांस लागू होतात, आणि यामुळें दशांश अपूर्णांकांसहि लागू होतात. परंतु या अध्यायांत दशांश अपूर्णांक मांडण्याची जी रिती दाखविली आहे, तिजवरून त्या वेगळाल्या रिती लावण्यास सोपें पडतें. आतां या वेगळाल्या पक्षांचा विचार करितों.

मनांत आण, कीं ४२·६३४, ४५·२८०६, २·००१, आणि ५४ यांची बेरीज करायाची आहे. (११२) प्रमाणें यांस समछेद केले पाहिजेत, ह्मणजे (१३८) प्रमाणें त्यांस समछेदरूप देऊन या पुढीलप्रमाणें मांडितात; ४२·६३४०, ४५·२८०६, २·००१०, आणि ५४·००००. हे वेगळाले दशांश अपूर्णांक आहेत, जांचे अंश ४२६३४०, ४५२८०६, २००१०, आणि ५४०००० असे आहेत, आणि त्यांचा साधारण छेद १०००० आहे. (११२) प्रमाणें यांची बेरीज $\frac{४२६३४०+४५२८०६+२००१०+५४००००}{१००००}$, अथवा $\frac{१४३९१५६}{१००००}$, अथवा १४३·९१५६ अशी आहे. ही बेरीज करण्याची सोपी रीति पुढील आहे; वेगळाले दशांश एकाखालीं एक मांड, असे कीं त्यांचीं दशांश चिन्हें एकाखालीं एक येतील, जसें;

$$\begin{array}{r} ४२·६३४ \\ ४५·२८०६ \\ २·००१ \\ ५४· \\ \hline १४३·९१५६ \end{array}$$

वेगवेगळाल्ये ओळींची बेरीज साध्ये मिळवणीप्रमाणें करून, दशांश चिन्ह दशांश चिन्हाचे खालीं मांड.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

१५२७+६४·७३२०९४+२·००१३+·००००१९७४;
२२७६·३+·१०७+·९+२६·३१७२+५६७३२·००१;
आणि १·११+७·७+·००३९+·००१४२+·८८३८ ? } यांचा वेग ळाल्या बेरजा काय आहेत ?

उत्तर, १५९३·७३३४१३७४, ५९०३५·६२५२, ९·६९९१२.

१४०. मनांत आण, कीं १३७·३२१ यांतून ९१·०७३२४ वजा करायाचे आहेत. या दोन अपूर्णांकांस समछेदकरून (१३८) प्रमाणें ९१·०७३२४ आणि १३७·३२१०० आहेत. तर यांची वजाबाकी $\frac{१३७३२१००-९१०७३२४}{१०००००}$, अथवा $\frac{४६२४७७६}{१०००००}$, अथवा ४६·२४७७६ आहे. वजाबाकी करायासाठीं ही पुढील रीति सोपी आहे; लहान संख्या मोठ्ये संख्येखालीं मांड, अशी कीं त्यांचीं दशांश चिन्हें एकाखालीं एक येतील, जसें;

```
 १३७·३२१
  ९१·०७३२४
 ----------
  ४६·२४७७६
```

वरचे ओळींतून खालची ओळ वजा कर, आणि जेव्हां एक ओळींत अंक आहे आणि दुसऱ्ये ओळींत नाहीं, तेव्हां मनांत आण कीं, रिकाम्ये जागीं शून्य आहे.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

१२३६२–२७४·२२१०७+·५;
९९७६·२०७३९४२–·००१४३९७६७२८;
आणि १·२+·०३+·००४–·०००५ ? } हे काय आहेत?

उत्तर, १२०८८·२७८९३, ९९७६·२०५९५४४३२७२; आणि १·२३३५.

१४१. कोणताहि दशांश, १०, १००, १०००, इत्यादि यांणीं गुणायाचा असेल, तर दशांश बिंदू केवळ उजव्येकडेस सारल्यानें गुणाकार होतो. मनांत आण, कीं १२·२०७९ हे १०० यांणीं गुणायाचे

(११७) प्रमाणें $\frac{१३२०७९}{१००}$, अथवा १३२०·७९ आहे. पुनः, १·३०९ ×१००००० = $\frac{१३०९}{१०००}$×१०००००, अथवा (११६) प्रमाणें $\frac{१३०९००००००}{१०००}$, अथवा १३०९०० आहेत. या आणि पुढील उदाहरणांपासून ही पुढील रीति निघती; दशांश अपूर्णांकास दशगुणक अंकानें गुणायाचें असेल, तर (१२६) प्रमाणें दशगुणक अंकांमध्यें जितकीं शून्यस्थळें आहेत, तितकींस्थळें दशांश बिंदू उजव्येकडे सार. असें जेव्हां करितां येत नाहीं, तेव्हां (१२७) प्रमाणें असें होईपर्यंत दशांशाचे उजव्येकडेस शून्यें मांड.

१४२. मनांत आण, कीं १७·०३६ यांस ४·२७ यांणीं गुणायाचें आहे. यांतील पहिला दशांश $\frac{१७०३६}{१०००}$, आणि दुसरा $\frac{४२७}{१००}$ आहे. (११८) प्रमाणें १७०३६ आणि ४२७ यांचा गुणाकारापासून त्या अपूर्णांकांचा गुणाकाराचा अंश होतो, आणि १०००, आणि १०० यांचा गुणाकारापासून छेद होतो; यामुळें गुणाकार $\frac{७२७४३७२}{१०००००}$, अथवा ७२·७४३७२ आहे. १७०३६ आणि ४२७ या दोन संख्या परस्पर गुणून, आणि १७·०३६ आणि ४·२७ यांत जितकीं दशांशस्थळें आहेत, तितकीं अंकस्थळें गुणाकारांत दशांश चिन्हानें वेगळीं केल्यानें वरचें काम सोपें पडतें, कां कीं दोन दशगुणक संख्यांत जितकीं शून्यें आहेत, तितकीं शून्यें त्यांचे गुणाकारांत येतात.

१४३. आतां हा प्रश्न उत्पन्न होतो; गुण्य आणि गुणक यांमध्यें जितकीं दशांशस्थळें असतील, तितकीं त्यांचे गुणाकारांत नसलीं, तर कसें करावें? या पक्षांत कसें करावें हें पहायासाठीं, ·१७२ यांस ·१०१ यांणीं गुण, अथवा $\frac{१७२}{१०००}$ यांस $\frac{१०१}{१०००}$ यांणीं गुण. या दोहोंचा गुणाकार $\frac{१७३७२}{१००००००}$, अथवा ·०१७३७२ आहे, (१३५) प्रमाणें. यामुळें, जेव्हां मागल्या कलमाची रीति लागू होण्यांस गुणाकाराचीं अंकस्थळें पुरीं होत नाहींत, तेव्हां तीं रिकामीस्थळें भरायासाठीं गुणाकाराचे डाव्येकडे शून्यें मांड, आणि त्यांचे डाव्येकडेस दशांश चिन्ह कर.

आणखी दुसरीं उदाहरणें.

·००१× ·०१ हे ·०००००१ आहेत.

५६×·०००१हे ·००५६ आहेत.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

३·००२ ×३·००२ =३×३+२×३×·००२+·००२×·००२
११·५६०९×५·३१९१=८·४४×८·४४–३·१२०९×३·१२०९
८·२१७ ×१०·००१=८×१०+८×·००१+१०×·२१७+·००१×·२१७

हें दाखीव!

अपूर्णांक.	वर्ग.	घन.
८२·९२	६८७५·७२६४	५७०१३५·२३३०८८
·०१७३	·०००२९९२९	·००००५१७७७१७
१·४३	२·०४४९	२·९२४२०७
·००९	·००००८१	·०००००७२९

१५·६२५× ६४=१०००   ·१५६२५× ·६४=·१
१·५६२५× ·६४=१   १५६२·५×·०६४=१००
·०१५६२५×·००६४=·०००१   १५६२५०००×·०६४=१००००००

१४४. कोणताहि दशांश, १०,१००,१०००, इत्यादि दशगुणक अंकांनीं भागायाचा असेल, तर दशगुणक अंकांमध्यें जितकीं शून्यस्थळें असतील, तितकीं स्थळें दशांश बिंदू डाव्येकडे सारल्यानें भागाकार होतो. असें करायासाठीं भागाकारांत अंकस्थळें पुरत नाहींत, तर त्याचे डाव्येकडेस इतकीं शून्यें मांड, कीं रिकामींस्थळें भरतील, आणि त्यांचे पूर्वी दशांश चिन्ह मांड. उदाहरण, १७३४·२२९ यास १००० यांणीं भाग; हा दशांश अपूर्णांक $\frac{१७३४२२९}{१०००}$ आहे, ह्मणजे हा

(१३९) प्रमाणें १००० यांनी भागिली तर $\frac{१७३४२२९}{१००००००}$, अथवा १·७३४२२९ होतात. अशा रितीनें, १·२१०६ यांस १०००० यांनीं भागिलें, तर ·०००१२१०६ होतात.

१४५. एक दशांश अपूर्णांक दुसऱ्ये दशांश अपूर्णांकानें भागण्याचे रितीचा संक्षेप करण्याचे पूर्वीं, (१२८) कलमांत कोणत्याहि अपूर्णांकास, दशांशरूप देण्याविषयीं जी गोष्ट सांगीतली ती पुनः लक्षांत आणली पाहिजे. त्या कलमांत असें दाखविलें, कीं $\frac{७}{१६}$ हे $\frac{४३७५}{१००००}$ अथवा ·४३७५ या बरोबर आहेत. आतां $\frac{3}{१२८}$ यांस दशांश अपूर्णांकाचें रूप दे. (१०८) कलमाचे रितीप्रमाणें कृति कर, जसें;

```
१२८)३००००००० (२३४३७५
     २५६
     ---
      ४४०                 ४८०
      ३८४                 ३८४
      ---                 ---
       ५६०                 ९६०
       ५१२                 ८९६
       ---                 ---
        ४८०                 ६४०
                            ६४०
                            ---
                              ०
```

यावरून असें दिसतें कीं ७ शून्यें कामांत आणिल्यावर, ३०,३००, इत्यादि वेगवेगळ्या संख्यांचे श्रेणींतील जी संख्या १२८ यांनीं निःशेष भागिली जाते, ती ३००००००० आहे; आणि यामुळें $\frac{3}{१२८}$, अथवा (१०८) प्रमाणें $\frac{30000000}{1280000000}$ हे $\frac{234375}{10000000}$, अथवा (१३५) प्रमाणें ·०२३४३७५ यांचे बरोबर आहेत.

या वरचे उदाहरणापासून अपूर्णांकास दशांशरूप देण्याची रीति निघती; अंशाचे उजव्ये बाजूस शून्यें मांड; नंतर छेदानें भाग, आणि अंशांतील सर्व अंक कामांत घेणें संपल्यावर, प्रत्येक बाकीवर शून्यें मांड आणि अंशाचीं शून्यें अनंत असें कल्पून त्यास छेदानें भागायाचें आहे, अशी कल्पना करून पुढें चाल. बाकी न राहीपर्यंत कृति करीत पुढें चाल, नंतर पहा कीं कितीं शून्यें कामांत आणिलीं. जितकीं शून्यें कामांत आणिलीं असतील, तितकीं उजव्येकडील भागाकारांतली स्थळें वेगळीं होतील असें दशांश चिन्ह मांड, यासाठीं भागाकारांतील अंकस्थळें पुरत नाहींत,

डून दशांश चिन्ह-त्याचे डाव्येकडे मांड.

१४६. (१२९) कलमांत जें सांगितलें, त्यापासून दिसतें, कीं हर एक अपूर्णांकास दशांश अपूर्णांक रूप देतां येत नाहीं. तथापि, त्यांत दाखविलें, कीं जास हवें तेवढें जवळ जवळ दशांश अपूर्णांकाचें रूप देतां येत नाहीं, असा कांहीं अपूर्णांक नाहीं. जसें, $\frac{१}{१०}, \frac{१४}{१००}, \frac{१४३}{१०००}, \frac{१४२८}{१००००}, \frac{१४२८५}{१०००००}$ इत्यादि, अथवा ·१,·१४,·१४२,·१४२८,·१४२८५ हे अपूर्णांक $\frac{१}{७}$ याचे अधिक जवळ जवळ येतात असें वर दाखविलें. या वेगळाल्या अपूर्णांकांस काढायासाठीं, मागील कलमांतील रीति लागू होती परंतु त्या रितींत या पुढील प्रमाणें फेर करावा लागतो. **पहिल्यानें** कृति करितानां, बाकी शून्य रहात नाहीं, ह्मणून बाकी शून्य आल्यावर तेथें थांबतात त्याप्रमाणें, कृतीमध्यें कोठेहि थांबावें, आणि कृति करण्यांत जितकीं शून्यें घेतलीं असतील तितकीं अंकस्थळें भागाकारांत येतील असें करावें, जर भागाकारांत तितकीं स्थळें नसलीं, तर भागाकाराचे डाव्येकडे तितकीं शून्यें मांडून, स्थळें पुरीं करून त्यांचे डाव्येकडे दशांश चिन्ह मांड. **दुसऱ्यानें** जा अपूर्णांकाशीं कृति करायास आरंभ केला त्याचे केवळ बरोबर असा अपूर्णांक निघत नाहीं, परंतु त्याचे जवळ जवळ असा अपूर्णांक येतो, आणि भागाकारांत अधिकस्थळें घेतलीं, तर तो अपूर्णांक अधिक जवळ जवळ येतो. जसें ·१४२८ हे $\frac{१}{७}$ याचे जवळ जवळ आहेत, परंतु ·१४२८५७ इतके जवळ नाहींत; आणि हेहि ·१४२८५७१४२८५७ इत्यादि, इतके जवळ नाहींत.

१४७. अपूर्णांकाचे अंशाचे उजव्ये बाजूस शून्यें असतील, त्यांची गणना त्या अपूर्णांकास दशांश रूप देण्याकरितां जीं नवीं शून्यें घ्यावीं लागतात, त्यांशीं करू नये. उदाहरण, $\frac{१००}{१२५}$ हा अपूर्णांक घे; याचे अंशाचे उजव्येकडेस शून्यें मांडून, त्यास छेदानें भाग. असें दिसतें कीं १००० हे १२५ यांणीं भागिले जातात, आणि त्याचा भागाकार ८ होतो. या पक्षांत अंशावर केवळ एक शून्य मांडिलें आणि यामुळें १०० भागिले १२५ तर भागाकार ·८ होतो. $\frac{१}{१२५}$ हा अपूर्णांक घेतला, आणि १००० यांस १२५ यांणीं भागिलें तर भागाकार ८ होतो, आणि या पक्षांत अंशावर तीन शून्यें मांडावीं लागतात, तर दशांशअपूर्णांक ·००८ आहे.

अपूर्णांकाचे छेदाचे उजव्या बाजूस शून्यें आहेत; जसें, $\frac{३१}{२५००}$. अंशावर शून्यें मांडणें आणि छेदावरून शून्य छेंकणें हीं दोन्हीं सारखींच आहेत; कां कीं (१०८) प्रमाणें $\frac{३१०}{२५००}$ हें $\frac{३१}{२५०}$ यासारिखेच आहेत, आणि $\frac{३१०}{२५०}$ हे $\frac{३१}{२५}$ यासारिखेच आहेत. तर या पक्षांत रीति हीच आहे; छेदांतील शून्यें छेंकून अंशावर शून्यें मांडून पूर्वींप्रमाणें चाल; नंतर किती शून्यें कामांत आणिलीं, तें जाणायासाठीं अंशावर जीं शून्यें मांडिलीं तींच केवळ मोजूं नये परंतु छेदांतून जितकीं शून्यें छेंकलीं त्यांसुद्धां मोज.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

या पुढील अपूर्णांकांस दशांश अपूर्णांकरूप दे;

$$\frac{१}{८००}, \frac{३६}{१२५०}, \frac{२९७}{६४} \text{ आणि } \frac{१}{१२८}.$$

उत्तर. ·००१२५, ·०२८८, ४·६४०६२५, आणि ·०७८१२५.

या पुढील अपूर्णांकांचे जवळ जवळ ६ स्थळांचे दशांश काढ;

$$\frac{२७}{४९}, \frac{१५६}{३३}, \frac{२२}{३७०००}, \frac{१९४}{१३}, \frac{२६३७}{९९०७}, \frac{१}{२९०८}, \frac{१}{४६६}, \text{ आणि } \frac{३}{२७७}$$

उत्तर. ·५५१०२०, ४·७२७२७२, ·०००५९४, १४·९२३०७६, ·२६६१७५, ·०००३४३, ·००२१४५, आणि, ·०१०८३०.

१४९. (१२१) कलमापासून असें कळलें, कीं दोन अपूर्णांक समछेद असतील, तर पहिल्याचा अंश दुसऱ्याचे अंशानें भागल्यानें, पहिला अपूर्णांक दुसऱ्यानें भागला जातो. मनांत आण कीं, १७·७६२ यांस ६·२५ यांणीं भागायाचें आहे. हे दोन अपूर्णांक (१३८) प्रमाणें समछेद झाल्यावर, १७·७६२ आणि ६·२५०, अथवा $\frac{१७७६२}{१०००}$ आणि $\frac{६२५०}{१०००}$ असे आहेत. यामुळे त्यांचा भागाकार $\frac{१७७६२}{६२५०}$ आहे, तर यास मागील रितीप्रमाणें दशांश अपूर्णांकरूप दिलें पाहिजे. ही कृति विस्तारानें या पुढील प्रमाणें आहे; छेदस्थळींचीं शून्यें सोड, आणि अंशावर किंवा वेगळाल्ये वजाबाक्यांवर हवीं तेवढीं शून्यें मांड, नंतर (१४५) प्रमाणें भागाकार कर.

५२६२
५०००
२६२०
२५००
१२००
६२५
५७५०
५६२५
१२५०
१२५०
०

छेंकिलें. तर भागाकारांत पांच दशांश स्थळें कर, ह्मणजे १७·७६२ यांस ६·२५ यांणीं भागण्यानें, २·८४१९२ असा भागाकार होतो.

१५०. एक दशांश अपूर्णांक दुसऱ्यें दशांश अपूर्णांकानें भागण्याची ही पुढील रीति आहे; भाज्य आणि भाजक यांमध्यें जांत दशांशस्थळें थोडीं आहेत, त्यावर शून्यें मांडून त्या दोहोंचीं दशांशस्थळें बरोबर कर. नंतर जितकीं दशांशस्थळें पाहिजेत, तितकीं शून्यें भाज्यावर मांडून दशांशचिन्ह काढून सरळ भागाकाराप्रमाणें कृति कर. भागाकारांत इच्छिलेलीं दशांशस्थळें घे.

जसें, ६·७१७३ यांस ·०१४ यांणीं तीन दशांशस्थळांपावेतों भागायाचें असेल, तर आरंभीं या दोहोंत चार दशांशस्थळें असायासाठीं ६·७१७३ आणि ·०१४० असें मांडावें. भागाकारांत तीन दशांशस्थळें असायासाठीं, ६·७१७३ यांवर तीन शून्यें मांडावीं लागतात; परंतु असें दिसतें कीं ·०१४० या भाजकावर एक शून्य आहे, ह्मणून तें शून्य छेंकून ६·७१७३ यावर दोन शून्यें मांडावीं. दशांशचिन्ह काढून, ६७१७३०० यांस ०१४ किंवा १४ यांणीं चालत्ये रितीनें भाग, ह्मणजे त्यावरून भागाकार ४७९८०७ आणि बाकी २ येतात. यावरून ४७९·८०७ हें उत्तर आहे.

सामान्यतः रीति हीच आहे; भाज्यांत भाजकापेक्षां जितकीं अधिक दशांशस्थळें आहेत, तितकीं भागाकारांत दशांशस्थळें असावीं. परंतु जेव्हां भाजकापेक्षां भाज्यांत अधिक दशांशस्थळें असतील, आणि भाज्यावर शून्यें मांडावीं लागतात, या पक्षाशिवाय वरची रीति निरुपयोगी होती. पूर्वी सांगीतलेली रीति याप्रमाणेंच आहे, आणि तींत किती द-

विषयीं जी रीति सांगीतली आहे, ती शिकणारानें पुरतेपणी माहित करून घ्यावी, आणि दशांशचिन्हाचें स्थळ **तर्कानें** काढण्याचा अभ्यास करावा. जसें, २६·११९÷७·२४३६ यांचे भागाकारांत दशांशचिन्हाचे पूर्वी एक अंक आहे, हें उघड आहे आणि २६·११९÷७२४·३६ यांचे भागाकारांत दशांशचिन्हाचे उजव्येकडे सर्व अर्थबोधक अंकांचे पूर्वी एक शून्य आहे.

अथवा ही पुढील रीति कामांत आणावी; भाजकाचें दशांशचिन्ह पुसून टाक, आणि भाजकांत जितकीं दशांशस्थळें असतील तितकीं स्थळें भाज्याचें दशांश चिन्ह उजव्येकडे सार, आणि स्थळें पुरत नसलीं, तर भाज्यावर शून्यें मांड. नंतर सरळ भागाकाराप्रमाणें भागून, शेवटील कामांत घेतलेल्या प्रत्येक दशांशस्थळाविषयीं भागाकारांत एक एक दशांशस्थळ कर, जसें, १७·३१४ हे ६१·२ यांणीं भागणें तर १७३·१४ भागिले ६१२ असें होतें, आणि दशांशचिन्ह भागाकारांत डाव्येकडील पहिल्या अंकाचे पूर्वी असावें. परंतु १७·३१४ भागिले ६६१७·५ हे, दशांश चिन्ह सारल्यावर १७३·१४ भागिले ६६१७५ असे होतात; आणि जापेक्षां भागाकारांत पहिला एक अंक येण्याचे पूर्वी, १७३·१४०००·· यांतून तीन दशांशस्थळें घ्यावीं लागतात, ह्मणून भागाकारांतील पहिला अर्थबोधक अंक दशांशाचा तिसऱ्या स्थळावर येतो, अथवा भागाकार ·००२ याप्रमाणें होतो.

उदाहरणें.

$$\frac{३\cdot१}{\cdot००२५}=१२४०,\quad \frac{\cdot०००६२}{\cdot६४}=\cdot०००९६८७५.$$

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

$\frac{१५\cdot००६\times१५\cdot००६-\cdot००४\times\cdot००४}{१५\cdot०१}=१५\cdot००२$ आणि $\frac{\cdot०१\times\cdot०१\times\cdot०१+२\cdot९\times२\cdot९\times२\cdot९}{२\cdot९१}$ $=२\cdot९\times२\cdot९-२\cdot९\times\cdot०१+\cdot०१\times\cdot०१$ हें दाखीव?

६ दशांश स्थळांपावेतों हे पुढील अपूर्णांक काय आहेत? $\frac{१}{३\cdot१४१५९}$, $\frac{१}{२\cdot७१८२८१८}$ आणि $\frac{३६५}{\cdot१८३४९}$.

उत्तर. ·३१८३१०, ·३६७८७९, आणि १९८९·२०९२२१.

पुढील श्रेण्यांचे दहापदांची ५ दशांश स्थळेंपर्यंत किंमत काढ.

$$१+\frac{१}{२}+\frac{१}{३}+\frac{१}{४}+\frac{१}{५}+\text{इत्यादि} \quad =२·९२८९५.$$

$$\frac{८०}{८१}+\frac{८१}{८२}+\frac{८२}{८३}+\frac{८३}{८४}+\frac{८४}{८५}+\text{इत्यादि} \quad =९·८८२८६.$$

१५१. आतां, व्यर्थ श्रम पडूं नये अशी दशांश परिमाणांशीं गणित करण्याची रीति दाखवितों. आरंभीं, मनांत आण, कीं भलत्ये कांहीं मैलांचें मोज घेऊन, त्यांची संख्या १७·८४६२१७ अशी झाली. या लांबींत किती मैल आहेत असें विचारिलें असतां, आणि अंश भागावांचून केवळ सुमाराचें उत्तर इच्छिलें असलें, तर बहुतकरून १७ मैल आहेत असें सांगतां येईल. जरी लांबींतील पूर्ण मैलांची संख्या ही आहे, तरी मैलांचे जवळ जवळ ही संख्या नाहीं; कां कीं लांबी १७ मैल आणि ८ दशांशांपेक्षां अधिक आहे, ह्मणून ती साडेसत्रापेक्षां अधिक आहे तर ती लांबी १८ मैल आहे असें ह्मटलें असतां, १७ मैल ह्मणण्यापेक्षां खरी आहे. ही संख्या अधिक आहे, तथापि हिचा अधिकपणा १७ मैलांचे कमीपणा इतका नाहीं, ह्मणजे त्यांत अर्ध मैलाइतकी चूक नाहीं. पुनः जर, ती लांबी मैलाचे दशांशाचे आंत इच्छिली असेल, तर १७·८हें उत्तर आहे; कां कीं जरी हें उत्तर ·०४६२१७ इतक्यानें कमी आहे, तथापि जितक्यानें १७.९ अधिक आहेत, तितक्यानें तें कमी नाहीं; आणि दशकाचें अर्ध, अथवा $\frac{१}{२०}$ यापेक्षां त्यांत चूक कमी आहे. पुनः जर, ती लांबी मैलाचे शतांशाचे आंत इच्छिली असेल, तर १७·८५ हे १७·८४ यापेक्षां खरे आहेत, कां कीं ·००६२१७ इतक्यानें १७·८४ कमी आहेत, ह्मणजे हे ·०१ याचे अर्धापेक्षां अधिक आहेत; आणि यामुळे १७·८४+·०१ हे १७·८४ यापेक्षां अधिक खरे आहेत. यावरून ही सामान्य रीति उत्पन्न होती; कामापुरती अमुक दशांशस्थळांची संख्या सांगीतली, तर तिचे उजव्येकडचे सर्व बाकी दशांश टाक, परंतु टाकलेल्यांतील डाव्येकडचा पहिला अंक ५ चे बरोबर किंवा त्यापेक्षां अधिक असेल, तर घेतलेल्यांतील उजव्येकडचा पहिला अंक १ नें वाढवावा.

अनुक्रमानें एकएक स्थळ सोडून, दशांशाचा संक्षेप करण्याचीं हीं पुढील उदाहरणें आहेत.

२·७१८२८१८,२·७१८२८२,२·७१८२८,२·७१८३,२·७१८,
२·७२,२·७,३·०

१·९९१९,१·९९२,१·९९,२·००,२·०

१५२. गुणक आणि भाजक इत्यादि यांत जितकीं खरीं दशांश स्थळें असतात, त्यांपेक्षां अधिक दशांश स्थळें, गुणाकार आणि भागाकार इत्यादि कृतींचे उत्तरांत आणण्याचें प्रयोजन नाहीं. मनांत आण, कीं ९·९८ आणि ८·९६ ह्या दोन, इंचांचा लांब्या दोन दशांश स्थळांपावेतों बरोबर मोजल्या आहेत, अथवा एक इंचाचे शतांशाचे आंत मोजिल्या आहेत. जी लांबी ९·९८ ह्मटली तिची खरी किंमत ९·९७५ आणि ९·९८५ यांचेमध्यें कोठेहि असेल, आणि ८·९६ इंची खरी किंमत ८·९५५ आणि ८·९६५ यांचे मध्यें कोठेहि असेल. यामुळें खऱ्या लांब्या दाखविणाऱ्या जा संख्या, त्यांचा गुणाकार, ९·९७५×८·९५५ आणि ९·९८५×८·९६५ यांचे मध्यें येईल, ह्मणजे गुणाकारांत तीन दशांश स्थळें घेतल्यानें, ८९·३२६ आणि ८९·५१६ यांचे मध्यें येईल. पहिल्या सांगितल्या संख्यांचा खरा गुणाकार ८९·४२०८ आहे. तर, असें दिसतें, कीं या पक्षांत गुणाकारांतील ८९ या पूर्णांकावर आणि कदाचित्, दशांशाचे पहिल्ये स्थळावर मात्र भरंवसा ठेवतां येतो. याचें कारण हेंच, कीं ८·९६ यांचे मोजण्यांत केवळ दशांशाचे तिसऱ्ये स्थळावर चूक येती, तथापि ती चूक गुणाकार करण्यानें ९·९७५ इतकी, अथवा जवळ जवळ १० वेळा वाढली जाती, आणि यामुळें ती दशांशाचे दुसऱ्ये स्थळाचे अंकास गूणकरिती. अशा कोणत्याहि गुणाकारावर कोठपर्यंत भरंवसा ठेवावा, हें ह्या पुढील सरळ रितीपासून कळेल. गुणक दाखवायासाठीं अ, आणि गुण्य दाखवायासाठीं ब घे; हे जर केवळ दशांशाचे पहिल्ये स्थळापावेतों खरे आहेत, तर त्यांचा गुणाकार बरोबर खरा होण्यास $\frac{अ+ब}{२०}$* यांचे आंत यावा; जर ते अंक दशांशाचे दोन स्थळांपावेतों खरे आहेत, तर त्यांचा गुणाकार बरोबर खरा होण्यास, $\frac{अ+ब}{२००}$ यांचे आंत यावा; आणि जर तीन स्थळांपावेतों, तर $\frac{अ+ब}{२०००}$ यांचे आंत यावा; आणि याप्रमाणें पुढेंहि. जसें, वरचे उदाहरणांत, ९·९८ आणि ८·९६ ह्या दोन संख्या दोन

* हें बरोबरच खरें नाहीं, परंतु कामापुरतें जवळ जवळ खरें आहे.

तर भागाकार ·०९४७ होतो, आणि त्यांचा गुणाकार ८९·४२०८ आहे, हा तर खरा बरोबर होण्यास ·०९४७ यांचे आंत आहे. जर ८९·४२०८ हे ·०९४७ यांणीं वाढविले, आणि कमी केले, तर ८९·५१५५ आणि ८९·३२६१ असे येतात, ह्मणजे हे अंक गुणाकाराचा दोन मर्यादा आहेत, आणि त्यांचे मध्यें गुणाकार यावा. यावरून, असें दिसतें, कीं या पक्षीं दशांशाचे पहिल्ये स्थळावर भरंवसा ठेवतां येत नाहीं, कां कीं जर तें पहिलें स्थळ खरें आहे, तर (१५१) प्रमाणें ·०५ इतकी चूक येणार नाहीं; आणि यांत ·०९ इतकी, किंवा हिजपेक्षां अधिक चूक अवश्य घडती. जर दिलेले अंक खरें आहेत, तर त्यांचा गुणाकारहि खरा आहे असें ह्मणण्याचें अगदीं प्रयोजन नाहीं, आणि दिलेले अंक केवळ अमुक दशांश स्थळापर्यंत खरे आहेत, असें या कलमापासून दिसतें हें ह्मणण्याचें प्रयोजन नाहीं. तर याविषयीं रीति या पुढीलप्रमाणें आहे; गुण्य आणि गुणक यांची बेरीज करून तिचें अर्ध कर, नंतर गुण्य अथवा गुणक यांत जितकीं दशांशस्थळें खरीं असतील, तितकीं स्थळें डाव्येकडे त्या अर्ध बेरिजेंत दशांश चिन्ह सार; तर यावरून जें उत्तर येईल त्याचे आंत गुणाकारावर भरंवसा ठेवतां येईल. भागाकाराविषयीं ही पुढील रीति आहे; गुण्य आणि गुणक यांचे जागीं भाज्य आणि भाजक घेऊन वरचे रितीप्रमाणें कृति कर, नंतर जें येईल त्यास भाजकाचे वर्गानें भाग; जो भागाकार येईल त्याचे आंत दिलेले भाज्य आणि भाजक यांचे भागाकारावर भरंवसा ठेवतां येईल. उदाहरण, १७·३२४ यांस ५३·८०९ यांणीं भागायाचें असेल, आणि ह्या दोन्ही संख्या तीन दशांश स्थळांपर्यंत खऱ्या असतील, तर त्यांची अर्ध बेरीज ३५·५६६ होईल, आणि ती वरचे रितीप्रमाणें ·०३५५६६ होईल, ती ५३·८०९ यांचे वर्गानें अथवा सुमारानें, ५० चे वर्गानें, अथवा २५०० यांणीं भागायाची आहे. हा भागाकार ·००००२ यापेक्षां कांहीं कमी आहे, ह्मणून १७·३२४ आणि ५३·८०९ यांचे भागाकारावर चार दशांशस्थळें पर्यंत भरंवसा ठेवतां येतो.

१५३. दोन दशांश अपूर्णांक परस्पर असे गुणायाचे आहेत, कीं अनुपयोगी दशांश सोडून गुणाकारांत कांहीं सांगीतलेलीं मात्र दशांश स्थळें रहावीं. या पुढील सांगीतलेल्या संकेतावरून, पहिल्यानें, स्पष्ट

१२३४ हे ४३२१ असे मांडिले, आणि जर कृति करत्येसमयीं प्रत्येक ओळ एक स्थळ डाव्येकडे न मांडितां, तशीच उजव्येकडे मांडिली तर चालेल, जसें, या पुढील उदाहरणांत;

२२२१	२२२१
१२३४	४३२१
८८८४	२२२१
६६६३	४४४२
४४४२	६६६३
२२२१	८८८४
२७४०७१४	२७४०७१४

मनांत आण, कीं ३४८·८४१४ यांस ५१·३०७४२ यांणीं गुणायाचें आहे, असें कीं गुणाकारांत चार दशांशस्थळें मात्र रहावीं. वर सांगितल्या रितिप्रमाणें गुणकाचे अंक उलटे फिरवून मांडिले, तर या पुढील प्रमाणें होईल.

३४८८४१४	
२४७०३१५	
१७४४२०७०	
३४८८४१४	
१०४६५२४	२
२४४१८	८९८
१३९५	३६५६
६९	७६८२८
१७८९८·१५२२	२३१८८

डाव्येकडील पहिलीं चार दशांशस्थळें, आणि जा ओळीपासून तीं चार दशांशस्थळें झालीं, त्या दोहोंस एक्ये उभ्ये रेघेनें दुसऱ्यांपासून वेगळीं कर. संक्षेप रीति करत्येसमयीं स्पष्ट आहे, कीं या पुढील गोष्टी मात्र लक्षांत आणिल्या पाहिजेत. पहिल्यानें, जें सर्व उभ्ये रेघेचे डाव्ये बाजूस आहे, त्याचा विचार केला पाहिजे; दुसऱ्यानें, उभ्ये रेघेचे उजव्येकडील पहिल्ये ओळींतून जे हातचे घेण्याचे आहेत, त्यांचा विचार केला पाहिजे. उभ्ये रेघेचे डाव्येकडील पहिली ओळ पाहिली असतां, ४,४,८,५,९, हे अंक दिसतात, त्यांतून पहिले ४ हे ४×१'† यापासून होतात, दुसरे ४ हे १×३' यापासून, ८ हे ८×७' यापासून, ५ हे ८×४' यापासून आणि

† १ हा गुणक अंक आहे हें जाणायासाठीं, १' अशा रूपानें मांडिला आहे.

९ हे ४×२' यापासून होतात. गुण्य आणि त्याचे खालीं गुणक उलटून मांडिल्यानें या पुढीलप्रमाणें होतें, ह्मणजे,

२४८८४१४
२४७०३१५

दशांशाचीं पहिलीं चार स्थळें उत्पन्न होण्यासाठीं, गुणकाचे जा अंकानें गुण्यांतील पहिला अंक गुणावा लागतो, ते दोन्ही अंक एकाखालीं एक येतात. आणि एथें पहा, कीं ५१·३०७४२ या गुणकांतील एकं स्थळीचा अंक १, हा गुण्यांतील चवथ्या दशांशस्थळींचे ४, या अंकाखालीं येतो. जर उभ्ये रेघेचे उजव्येकडून कांहीं हातचे घेण्याचे नसतील, तर ही पुढील रीति लागू होईल; गुणकाचे अंक उलटे फिरीव, आणि ते गुण्याखालीं मांड, अशा रीतीनें कीं, गुण्यांतील जें शेवटील दशांशस्थळ ठेवण्याचें आहे, त्याचा खालीं गुणकांतील एकमस्थळींचा अंक यावा; गुणकांतील जा अंकांवर गुण्याचे अंक नसतील त्यांवर शून्यें मांड ; चालत्ये रितीप्रमाणें गुणाकार कर, परंतु गुणकाचा जा अंकानें गुणायाचें आहे, त्याचा वरचा गुण्यांत जे अंक आहेत, त्यापासून गुणण्यास प्रारंभ कर, उजव्येकडील अंकांस मनांत आणूं नको; गुणाकाराचे ओळींचे पहिले अंक एकाखालीं एक मांड. उभ्ये रेघेचे उजव्येकडून डाव्येकडे हातचे नेतां यावे, यासाठीं या रितींत फेर करायास, या पुढील दोन गोष्टींवर लक्ष दिलें पाहिजे, पहिल्यानें गुणाकाराचा ओळी करतानां जे हातचे घ्यावे लागतात त्यांवर लक्ष दिलें पाहिजे, दुसऱ्यानें उभ्ये रेघेचे उजव्येकडील पहिल्ये ओळींचे बेरिजेपासून जे हातचे घ्यावे लागतात, त्यांविषयीं लक्षांत आणिलें पाहिजे. गुणकांतील प्रत्येक अंकानें त्याचे वरल्या उजव्येकडील पहिल्या अंकास गुणावें, आणि गुणाकारांतील एकंचा अंक न मांडितां, हातचे दुसऱ्या अंकाचा गुणाकारांत मिळवावे, असें केल्यानें, वर सांगीतलेली पहिली गोष्ट सिद्ध होती. परंतु (१९१) व्ये कलमांतील मूळकारणावरून ५ पासून १५ पर्यंत हातचा १, १५ पासून २५ पर्यंत हातचे दोन, इत्यादि घेतल्यानें, ह्मणजे, जवळचे दशक अंक हातचे घेतल्यानें, वरचा दोन ही गोष्टींची व्यवस्था होती. जसें, ३७ आले असतां, हातचे ४ घ्यावे, का कीं ३७ हे ३० पेक्षां ४० चे जवळ आहेत. यावरून दशांशाचें शेवटील स्थळ बरोबर येणार नाहीं, परंतु खरें उत्तर येण्या-

करितां, जितकीं दशांशस्थळें असावीं, त्यापेक्षां एक स्थळ अधिक घेऊन प्रारंभ केला असतां, चूक येणार नाहीं. तर यावरून ही पुढील रिती निघते.

१५४. दोन दशांशअपूर्णांकांचे गुणाकारांत दशांशाचीं न स्थळें येण्याकरितां याप्रमाणें कर.

पहिल्यानें. गुणकाचे अंक उलटे फिरवून दशांशबिंदू सोडून गुण्याखालीं गुणक मांड, असे कीं गुण्याचे न दशांश स्थळांखालीं गुणकाचा एकं स्थळींचा अंक येईल, आणि असें करितांना गुणकाचे प्रत्येक स्थळावर गुण्याचा अंक नसला, तर त्याचे जागीं शून्यें मांड.

दुसऱ्यानें. चालीप्रमाणें गुणाकार कर, परंतु गुणकांतील प्रत्येक अंकावर गुण्यांतील जो अंक येतो, त्याचे उजव्येबाजूचे अंकानें गुणाकार करायास आरंभ कर; ह्या गुणाकाराचा अंक मांडू नये, परंतु त्याचे जवळचा दशक हातचा घेऊन पुढें चाल.

तिसऱ्यानें. सर्व ओळींचे उजव्येकडील पहिले अंक एकाखालीं एक मांड; नंतर चालीप्रमाणें बेरीज घे; आणि दशांशासाठीं उजव्येकडे न स्थळें घे.

१३६·४०७२ यांस १·३०६०९ यांणीं गूण, असें कीं गुणाकारांत ७ दशांशस्थळें होतील.

```
१३६४०७२०००
     ९०६०३१
-----------
१३६४०७२०००
 ४०९२२१६००
    ८१८४४३२
     १२२७६६
-----------
१७८·१६००७९८
```

या पुढील उदाहरणांत वरचा दोन ओळी गुण्य आणि गुणक आहेत; आणि गुणाकारांत जितकीं दशांश स्थळें ठेवायाचीं आहेत तीं उत्तरांपासून कळतील.

·४४७१६१८	३३·१६६२४८	३·४६४१०१६
३·७७१९२१४	१·४१४२१३६	१७३२·५०८
३७७१९२१४	०३३१६६२४८	३४६४१०१६०
८१६१७४४	६३१२४१४१	८०५२३७१
१५०८७६८६	३३१६६२५	३४६४१०१६०
१५०८७६८	१३२६६५०	२४२४८७११२
२६४०३४	३३१६६	१०३९२३०५
३७७२	१३२६६	६९२८२०
२२६३	६६३	१७३२०५
३८	३३	२७७१
३०	१०	६००१·५८३७३
१·६८६६५९१	२	
	४६·९०४१५	

(१४३) कलमापासून अभ्यासाकरितां दुसरीं उदाहरणें मिळतील.

१५५. भागाकाराचें उदाहरणाकरितां, भलत्या कांहीं दोन संख्या घे, जसें, १६·८०४३७९२१ आणि ३·१४२, यांतून पहिली संख्या कांहीं इच्छिल्या स्थळांपावेतों, जसें, एथे ५ स्थळांपावेतों दुसऱ्या संख्येनें भाग. ह्मणजे याप्रमाणें होईल;

३·१४२)१६·८०४३७९२१(५·३४८३०

(अ)		
	१५७१०	
	१०९४३	
	९४२६	
	१५१७७	
	१२५६८	
२६०९	२६०९	९
२५१४	२५१३	६
९५	९६	३२
९४	९४	२६
१	२	०६१

आतां (१५३) प्रमाणें, शेवटचे २६०१ या बाकींतील २ यांचे उ-

जव्येकडेस जे अंक येतात, त्यांस उभ्ये रेघेनें दुसऱ्यांपासून वेगळे कर. गुणाकाराप्रमाणें यांत, जे उभ्ये रेघेचे डाव्येकडे आहेत, ते सर्व वरचे (अ) प्रमाणें संक्षेपरितीने निघतील. गुणाकाराचे संक्षेपरितीविषयीं एवढें वर उघड करून सांगितलें, आतां एथें अधिक विस्ताराने सांगण्याचें प्रयोजन नाहीं; तर ह्या पुढील रितीनेंहि निर्वाह होईल; एक दशांशअपूर्णांक दुसऱ्या दशांशअपूर्णांकानें न स्थळापर्यंत भागायाचा असेल; तर चालत्ये रितीनें एक पायरीपर्यंत भागाकार कर, आणि (१५०) प्रमाणें भागाकार कोणत्या स्थळींचा अंक आहे, त्याचा निश्चय कर; नंतर भाजकांतील अंकांचा स्थळांपेक्षां भागाकारांतील काढण्याचीं राहिलेलीं स्थळें कमी असतील, तोंपर्यंत चालत्ये रितीनें भागाकार करीत जा; जर भागाकार करण्याचे आधींच असें असेल, तर चालीप्रमाणें भागाकार करीत पुढें जाऊं नको. वजाबाकीवर शून्य किंवा अंक मांडू नये, परंतु त्याचे बदलींत भाजकाचे उजव्ये बाजूकडील एक अंक सोडून, संक्षेप भाजकानें चालीप्रमाणें एक पायरी पुढें चाल, परंतु ही गोष्ट स्मरणांत ठेविली पाहिजे, कीं या संक्षेप भाजकाचा गुणाकार करते समयीं, त्यांतून जो अंक सोडिला त्याचे जवळचा दशक, (१५४) प्रमाणें हातचा घेतला पाहिजे; याप्रमाणें भाजकांतील सर्व अंक क्रमाक्रमानें कांहीं न राहात पर्यंत सोडीत पुढें चाल. भागाकारांतील पहिल्या अंकाचें स्थळ, आणि इच्छिलेलीं दशांशस्थळें या दोन्ही गोष्टी आरंभीं समजतात, यावरून भागाकारांत किती अंकस्थळें होतील हें कृतीचे आरंभीं सांगतां येईल. भागाकारापेक्षां भाजकांत अधिक अंकस्थळें असलीं तर तीं कामांत घेण्याचें अगत्य पडत नाहीं; ह्मणून तीं सोडून द्यावीं. परंतु बाकी अंक (१५१) प्रमाणें नीट केले पाहिजेत; भाजकाचे डाव्येकडेस आरंभीं शून्यें असलीं, जसें, ·००३१७८ असा दशांशअपूर्णांक भाजक असेल, तर तो अपूर्णांक $\frac{·३१७८}{१००}$ या रूपाचा आहे, तर चालते रितीप्रमाणें ·३१७८ यांणीं भाग, नंतर भागाकारास १०० नीं गुण, अथवा दशांशचिन्ह दोन स्थळें उजव्येकडे सार. यामुळें जर ६ दशांशस्थळें इच्छिलीं आहेत, तर स्पष्ट दिसतें कीं ·३१७८ यांणीं भागणें तर ८ स्थळें घेतलीं पाहिजेत. भागाकाराचा शेवटील अंक काढितेसमयीं, जवळचा अंक असेल तो घेतला पाहिजे, जसें, या पुढील उदाहरणांतून दुसऱ्या उदाहरणांत दाखविलें आहे.

इच्छिलेलीं स्थळें,	२	८
भाजक,	·४१४३२	३·१४१५९२७
भाज्य,	६७३·१४८९	२·७१८२८१८०
	४१४३२	२ ५१३२७४१६
	२५८८२८	२०५००७६४
	२४८५९२	१८८४९५५६
	·१०२३७*	१६५१२०८
	८२८६	१५७०७९६
	१९५१	८०४१२
	१६५७	६२८३२
	२९४	१७५८०
	२९०	१५७०८
	४	१८७२
	४	१५७१
	०	३०१
		२८३
		१८
		१९
भागाकार,	१६२४·७१	·८६५२५५९६

(१४३) आणि (१५०) कलमांतून दुसरीं उदाहरणें मिळतील.

सातवा भाग.

वर्गमूळ काढण्याविषयीं.

१५६. पूर्वी (६६) कलमांत असें सांगीतलें आहे, कीं कोणतीहि संख्या त्याच संख्येनें गुणिली, तर त्या गुणाकारास त्या संख्येचा **वर्ग** ह्मणतात. जसें, १६९, अथवा १३×१३ हा १३ चा वर्ग आहे. उलटे

* भाज्यांतील सोडिलेला अंक ९ आहे, याकरितां या जागीं ६ चे ठिकाणीं ७ मांडिले आहेत (१५१) प्रमाणें.

पक्षानें, १३ यांस १६९ यांचें **वर्गमूळ** ह्मणतात, आणि ५ हें २५ यांचें वर्गमूळ आहे; आणि जेव्हां एक संख्या त्याच संख्येने गुणून तो गुणाकार दुसऱ्या संख्येचे बरोबर आहे, तर पहिली संख्या दुसरे संख्येचें वर्गमूळ आहे. $\sqrt{\ }$ अथवा $\sqrt{\quad}$ या चिन्हानें वर्गमूळ दाखवितात; जसें, $\sqrt{२५}$ याचा अर्थ पंचविसांचें वर्गमूळ, अथवा ५ होतो. $\sqrt{१६+९}$ हें १६+९ यांचें वर्गमूळ किंवा ५ आहे, आणि अशे वर्गमूळ रूपाचा, $\sqrt{१६}+\sqrt{९}$ यारूपाशीं गोंधळ करूं नये, कां कीं याचा अर्थ ४+३ अथवा ७ आहे.

१५७. वर सांगितल्या व्याख्यानापासून हीं पुढील समीकरणें स्पष्ट कळतील;

$$\sqrt{अ}\times\sqrt{अ}=अ$$

$$\sqrt{अअ}=अ$$

$$\sqrt{अब}\times\sqrt{अब}=अब$$

$$(\sqrt{अ}\times\sqrt{ब})\times(\sqrt{अ}\times\sqrt{ब})=\sqrt{अ}\times\sqrt{अ}\times\sqrt{ब}\times\sqrt{ब}=अब$$

यावरून $$\sqrt{अ}\times\sqrt{ब}=\sqrt{अब}$$

१५८. कोणत्याहि संख्येचा वर्ग होतो, ह्मणून त्या संख्येचें वर्गमूळहि आहे असा निश्चय नाहीं; जसें, ५ हे जरी त्याणीच गुणिलें जातील, तथापि, तिणें तीच गुणिल्यानें ५ होतील अशी कांहीं संख्या नाहीं. बीजगणितांत ही गोष्ट सिद्ध झाली आहे, कीं त्याणें तोच गुणिला असतां गुणाकार पूर्णांक येईल असा कोणताहि अपूर्णांक† नाहीं, आणि कितीहि उदाहरणें घेतलीं तरी ही गोष्ट खरी आहे असें कळेल; यामुळें ५ यांस नुसता पूर्णांक किंवा नुसता अपूर्णांक असें एकहि वर्गमूळ नाहीं. ह्मणजे त्यांस निःशेष वर्गमूळच नाहीं, असें असतां असे अपूर्णांक काढण्याचा रिती आहेत, कीं जांचे वर्ग हवे तेवढे ५ यांचे **अवळ** होतील, परंतु बरोबर ५ होणार नाहींत. त्यांतील एकारितीपासून $\frac{१५१२७}{६७६५}$ येतात, ह्मणजे यांचा वर्ग $\frac{१५१२७}{६७६५}\times\frac{१५१२७}{६७६५}$, अथवा $\frac{२२८८८२६१२९}{४५७६५२२५}$ होतो; याचें आणि ५ यांचें अंतर $\frac{४}{४५७६५२२५}$ इतकें मात्र आहे, ह्मणजे, तें अंतर ·००००००१ यापेक्षां कमी आहे; यावरून अंक गणित आणि बिजगणित यांतील तर्क करायास, $\sqrt{५}$ हे

† या ठिकाणीं खऱ्ये जातीचा अपूर्णांक, जसें $\frac{७}{८}$, अथवा $\frac{१५}{११}$ असा असावा, परंतु जे अपूर्णांकरूपांत असून खरेपणानें पूर्णांक आहेत, जसें $\frac{१०}{५}$, अथवा $\frac{२७}{३}$, असा नसावा.

कामांत घेतां येतील, परंतु कोणतेंहि कृत्य वहिवाटींत आणावें लागेल, तेव्हां जा अपूर्णांकाचा वर्ग ५ यांचे जवळ असेल, त्यास √५ यांचे जागीं कामांत घेतलें पाहिजे. आणि जसें जसें खरेपणाचें अगत्य असेल, तसा तसा अपूर्णांक निवडला पाहिजे. कां कीं कांहीं कामासाठीं $\frac{१२३}{५५}$ हा अपूर्णांक पुरेल, कां कीं याचा वर्ग आणि ५ यांचें अंतर $\frac{४}{३०२५}$ इतकें मात्र आहे; दुसऱ्या कामासाठीं, वर सांगीतलेला अपूर्णांक घ्यावा लागेल; अथवा कदाचित् जाचा वर्ग त्यापेक्षां ५ यांचे अधिक जवळ जवळ होईल तो घ्यावा लागेल. जा संख्येचें बरोबर वर्गमूळ आहे, तें काढायाची, अथवा जीस वर्गमूळ बरोबर नाहीं, त्याविषयीं जाचा वर्ग हवा तेवढा तिचे जवळ येईल, असा अपूर्णांक काढायाची रीति आतां दाखवितों. पुढील गोष्ट स्पष्ट आहे, तथापि आरंभीं सांगीतलें पाहिजे, कीं दोन संख्यांतून मोठ्ये संख्येचा वर्ग मोठा आहे; आणि कोणतीहि संख्या दुसऱ्ये दोन संख्यांचेमध्यें असली, तर तिचा वर्ग त्या दोन संख्यांचे वर्गांमध्यें येतो.

१५९. क्ष ही एक संख्या आहे, आणि तीजमध्यें कांहीं भाग आहेत जसें अ, ब, क, ड, हे चार भाग; ह्मणजे या पुढीलप्रमाणें,

$$क्ष=अ+ब+क+ड$$

(६८) प्रमाणें त्या संख्येचा वर्ग पुढीलप्रमाणें आहे,

$$\begin{aligned}&अअ+२अ(ब+क+ड)\\&+बब+२ब(क+ड)\\&+कक+२कड\\&+डड\end{aligned}$$

त्या कलमांत वेगवेगळ्या भागांचे संख्येचा वर्ग करायाची रीति याप्रमाणें सांगीतली आहे; प्रत्येक भागाचा वर्ग करून, त्याचे उजव्येकडचे सर्व निरनिराळे भाग त्याचे दुपटीनें गुण, नंतर या वेगळाल्या गुणाकारांची बेरीज करून, त्या सर्व संख्येचा वर्ग होईल. वर आलेल्या पद्धतीमध्यें २अ यांस ब, क, आणि ड, या प्रत्येकानें निरनिराळें गुणून त्यांची बेरीज न घेतां, २अ यांस त्यांचे सर्व पुढल्ये भागांचे बेरिजेनें गुणिलें आहे, ह्मणजे (५२) प्रमाणें हीं दोन्हीं सारिखींच आहेत, आणि एका संख्येचे निरनिराळे भाग कसेहि मांडिले असतां, त्यांची बेरीज त्या संख्येचे बरोबर आहे, ह्मणून त्या भागांचा क्रम उलटा

मांडितां येईल, ह्मणजे, शेवटचें पद पहिल्यानें मांडितां येईल; आणि इत्यादि असें केल्यानंतर वर्ग करण्याची ही पुढील रीति आहे; प्रत्येक भागाचा वर्गकरून त्याचे डाव्येकडचे सर्व निरनिराळे भाग त्याचे दुपटीनें गुण. यावरून वर्गमूळ काढायास एक उलटीरीति सोईनें सांपडती. ती ही आहे; न संख्येचें वर्गमूळ काढायाचें असेल, तर कांहीं अ संख्या घे, आणि न संख्येंतून अ संख्येचा वर्ग वजा होतो किंवा नाहीं हें पहा; जर वजा होईल, तर वजाकरून बाकी काढ, नंतर दुसरी एक ब संख्या घे, तर ब चा वर्ग, आणि पूर्वीं घेतलेली अ संख्या ब चे दुपटीनें गुणून तो गुणाकार, हीं दोन्हींवर आलेल्या बाकींतून वजा होतील किंवा नाहीं हें पहा; जर वजा होतील, तर वजाकरून दुसरी बाकी काढ. नंतर तिसरी एक क संख्या घे, तर क चा वर्ग, आणि अ+ब यांस क चे दुपटीनें गुणून तो गुणाकार, हीं दोन्हीं वरचे दुसऱ्ये बाकींतून वजा होतील तर पहा; याप्रमाणें जोंपर्यंत बाकी कांहीं राहाणार नाहीं, तोंपर्यंत कर, अथवा कोणताही नवा भाग १ इतका लहान घेऊन त्याशीं कृति केली असतां, पूर्व बाकींतून वजा करितां येत नाहीं, तोंपर्यंत कृति कर. यांतून पहिल्यापक्षीं अ, ब, क, इत्यादींची बेरीज इच्छिलें वर्गमूळ आहे; दुसऱ्यापक्षीं वर्गमूळ नाहीं.

१६०. उदाहरण, मनांत आण कीं २०२५ यांचें वर्गमूळ आणायाची इच्छा आहे. पहिला भाग २० घेतला, तर २० यांचा वर्ग ४००, हे २०२५ यांतून वजा करून पहिली बाकी १६२५ निघती. पुनः दुसऱ्या भागासाठीं २० घेतले, तर त्यांचा वर्ग आणि पहिला भाग २० यांचे दुपटीनें गुणून याप्रमाणें होतें, ह्मणजे २०×२०+२×२०×२०, अथवा १२०० होतात; हे १६२५ या पहिल्या बाकींतून वजाकरून दुसरी बाकी ४२५ निघती. तिसऱ्या भागासाठीं ७ घेतले, तर हे अधिक आहेत असें दिसतें, कां कीं ७×७+२×७×२०+२०, ह्मणजे ६०९ होतात, हे तर ४२५ पेक्षां अधिक आहेत. यामुळें ५ घेऊन पहा, ह्मणजे ५×५+२×५×२०+२०, हे बरोबर ४२५ होतात, तेणेंकरून कृति संपती. यामुळें २०२५ यांचें वर्गमूळ २०+२०+५, अथवा ४५ आहे, हें ताडून पाहिलें असतां खरें आहे असें दिसेल; कां कीं ४५×४५=२०२५ आहेत. पुनः, १३३४० यांचें वर्गमूळ आहे कीं नाहीं, हें विचारिलें आहे असें मनांत आण. पहिल्या भागा-

साठीं १०० घे, ह्मणजे यांचा वर्ग १०००० हा सांगीतलेल्या संख्येंतून वजाकरून ३३४० ही पहिली बाकी निघती. दुसऱ्या भागासाठीं १० घे, तर १०×१०+२×१०×१००, अथवा २१०० हे पहिल्ये बाकींतून वजाकरून, ३३४०-२१००, अथवा १२४० ही दुसरी बाकी निघती. तिसऱ्या भागासाठीं ५ घे; तर ५×५+२×५×(१००+१०), अथवा ११२५ होतात, हे १२४० यांतून वजा केले, तर बाकी ११५ राहातात. यावरून दिसतें कीं या पक्षांत वर्गमूळ नाहीं; कां कीं चवथ्या भागासाठीं केवळ एक एकं घेतला, तर १×१+२×१×(१००+१०+५), अथवा २३१ होतात, हे तर ११५ पेक्षां अधिक आहेत. परंतु सांगीतली संख्या, १३३४०, ही ११५ इतक्यानें कमी असती, तर प्रत्येक बाकी ११५ इतक्यानें कमी असती, आणि शेवटीं बाकी शून्य राहाती. यामुळें १३३४०-११५, अथवा १३२२५ यांचें वर्गमूळ १००+१०+५, अथवा ११५ आहे; ह्मणून विचारिलेल्या प्रश्नाचें उत्तर हेंच आहे, कीं १३३४० यांचें वर्गमूळ नाहीं, आणि १३२२५ ही संख्या तिचे जवळची खालची आहे, जिचें वर्गमूळ बरोबर ११५ आहे.

१६१. बहुतकरून जे भाग घेण्यास सोईस पडतील, त्यांची सूचना व्हावी असे तऱ्हेचें रूप वरचे रितीस देण्याचें मात्र राहिलें आहे. (५७) प्रमाणें स्पष्ट आहे, कीं जा संख्येचे उजव्येकडेस शून्यें आहेत, जसें, ४०००, यांचे वर्गांत शून्यांची संख्या दुप्पट आहे. जसें, ४०००×४०००=१६००००००; यामुळें, कोणतीहि वर्ग संख्या,† जसें ४९, तिजवर शून्यांची समसंख्या असली, जसें ४९००००, तर ती वर्ग संख्या आहे. ४९०००० हिचें मूळ* ७०० आहे. ही गोष्ट मनांत ठेऊन, उदाहरणाकरितां, भलती कांहीं संख्या घे, जसें ७६१७६; यांत उजव्येकडून डाव्येकडेस दोन दोन अंकांवर खुणा करून त्यांस वेगळे कर, याप्रमाणें शेवटीं एक किंवा दोन अंक राहातपर्यंत करीत जा; जसें ७,६१,७६. ही संख्या ७,००,००, हिजपेक्षां अधिक आहे, परंतु तिचा डाव्येकडील पहिला अंक, वर्ग संख्या नाहीं, तिचेजवळ

† वर्ग संख्या ह्मणजे जीस वर्गमूळ आहे. जसें २५ ही वर्ग संख्या आहे, परंतु २६ ही तशी नाहीं.

* वर्गमूळ शब्दाचे जागीं बहुतकरून संक्षेपाकरितां केवळ मूळ असें ह्मटलें आहे.

ची खालची वर्गसंख्या ४ आहे. यावरून ७,००,००, हिचे जवळ-ची खालची वर्गसंख्या ४,००,००, आहे यांत चार शून्यें आहेत, आणि तिचें वर्गमूळ २०० आहे. तर २०० हे पहिल्ये भागाक-रितां घे; यांचा वर्ग ७६१७६ यांतून वजा करून, ३६१७६ ही पहिली वजावाकी राहाती; आणि ७६१७६ यांचे वर्गमूळांतून, अति मोठ्ये संज्ञेची अति मोठी संख्या अशानें निघाली हें स्पष्ट आहे; कां कीं ३०० ही मोठी होती, ह्मणजे तिचा वर्ग ९,००,००, हा ७६१७६ पेक्षां अधिक आहे; तर (१६०) कलमांतल्या उदाहरणाप्र-माणें, ३६१७६ या बाकीपासून दुसरा भाग निवडून काढायाचा रा-हिला. आतां जें वर सांगीतलें त्यापासून दिसतें, कीं हा दुसरा भाग १०० एवढा होणार नाहीं; यामुळें त्याची अति मोठी संज्ञा दशकां-तील कांहीं संख्या होईल. १,२,३, इत्यादि सरळ संख्यांचे दशक दाखवायासाठीं न घे; ह्मणजे नवा भाग दाखवायासाठीं १०न घे, यांचा वर्ग १०न×१०न, अथवा १००नन आहे, आणि त्याची दुप्पट पूर्वीचे भागानें गुणून २० न×२००, अथवा ४००० न होतात; हीं दोन्हीं मिळून ४०००न+१००नन होतात. आतां न ची किमत असी घेतली पाहिजे कीं, वरची पद्धती ३६१७६ यांपेक्षां अधिक होणार नाहीं. ३६१७६ यांत ४००० किती वेळा जातात, अथवा ३६ यांत ४ किती वेळा जातात, ती वेळांची संख्या नचे जागीं घे-ऊन पाहातां येईल. (८१) कलमांतील गोष्ट एथें लागू होती. ह्मणून ९ दशक किंवा ९० घेऊन पहा. तर, २×९०×२००+९०×९०, अथवा ४४१००, हे वजा करायाचे आहेत, हे तर अधिक आहेत, कां कीं वरची बाकी केवळ ३६१७६ आहे. पुनः ८ दशक, किंवा ८० घेतले, तर २×८०×२००+८०×८०, अथवा ३८४०० होतात, आणि हेहि अधिक आहेत. ७ दशक किंवा ७० घेतले, तर २×७०×२००+७०×७०, अथवा ३२९०० होतात, हे ३६१७६ यांतून वजा करून ३२७६ ही दुसरी वजावाकी निघती. वर्गमूळाचा राहिलेला भाग अ-वश्य एकंचा असावा. पूर्वीप्रमाणें कांहीं एकंची संख्या दाखवायासाठीं न घे. पूर्वीचा भाग २००+७० किंवा २७० असतां, जी संख्या वजा करायाची आहे, ती २७०×२न+नन, अथवा ५४०न+नन आहे. यावरून, पूर्वीप्रमाणें, ५४०न हे ३२७६ यांपेक्षां कमी असावे,

अथवा ३२७६ यांत जितक्या वेळा ५४० जातात, अथवा (८१) प्रमाणें ३२७ यांत जितक्या वेळा ५४ जातात, त्या वेळां पेक्षां **न** अधिक नसावा. यामुळें, ६ चालतील कीं नाहीं हें पाहातों, तर यावरून २×६×२७० +६×६, अथवा ३२७६ ही संख्या वजा करायास मिळाली. ही तर दुसऱ्ये वजाबाकीचे बरोबर आहे, आणि तिसरी बाकी शून्य होऊन कृति संपती. यामुळें, इच्छिलें वर्गमूळ २००+७०+६ अथवा २७६ आहे.

जा संख्या वजा करायाचा आहेत, त्या करण्याची रीति या पुढील-प्रमाणें संक्षिप्त होईल. पूर्वी काढलेल्या भागांची बेरीज दाखवायासाठीं **अ**, आणि नवा भाग दाखवायासाठीं **न** घे; तर जी वजा करायाची आहे, ती २**अन**+**नन** आहे, अथवा, (५४) प्रमाणें २**अ**+**न** गुणिला **न** आहे. यामुळें वजा करण्याची संख्या काढण्याची रीति हींच आहे; पूर्वींचे सर्व भागांचे बेरिजेची दुप्पट करून त्यांत नवा भाग मिळवून ती बेरीज नव्या भागानें गुणावी.

१६२. मागील कलमांतली कृति या पुढीलप्रमाणें आहे;

```
          ७,६१,७६(२००                 ७,६१,७६(२७६
          ४ ० ० ० ०   ७०               ४
    ४००) ३,६१,७६      ६         ४७) ३६१
     ७०) ३ २९ ० ०                      ३२९
    ४००)   ३२७६                ५४६)   ३२७६
    १४०)   ३२७६                        ३२७६
      ६     ०                             ०
```

वरचा पहिल्या उदाहरणांत, संख्या विस्तारानें मांडिल्या आहेत; दुसऱ्या उदाहरणांत, (७९) कलमाप्रमाणें अनुपयोगी शून्यें छेकिलीं आहेत, आणि कृतिपुढें चालवून, ६१, आणि ७६ हे दोन भाग, जोंपर्यंत त्यांचे खालीं शून्यें येत नाहींत तोंपर्यंत खालीं आणीत नाहीं. मागील कलमांतील तर्क लागू होईल असें खालीं एक दुसरें उदाहरण देतों.

```
         ३४,८६,७८,४४,०१(५००००              ३४,८६,७८,४४,०१(५९०४९
         २५,०० ०० ००००   ९०००             २५
         ─────────────     ४०            ─────
१००००० )  ९८६७८४४०१         ९          १०९) ९८६
  ९००० )  ९८१००००००                        ९८१
         ─────────────                    ─────
१००००० )    ५७८४४०१                ११८०४)  ५७८४४
 १८००० )    ४७२१६००                        ४७२१६
    ४० )  ───────────                      ─────
१००००० )    १०६२८०१                ११८०८९)१०६२८०१
 १८००० )    १०६२८०१                        १०६२८०१
    ८० )  ───────────                      ───────
     ९ )          ०                              ०
```

१६३. कोणत्याहि संख्येचें वर्गमूळ काढण्याची रीति;

पहिल्यानें. जोंपर्यंत डाव्येकडील दोन किंवा एक अंकस्थळ मात्र राहील, तोंपर्यंत उजव्येकडून आरंभून दोनदोन अंकांचीं स्थळें खुणेनें निरनिराळीं कर.

दुसऱ्यानें. डाव्येकडील पहिल्या भागांतल्या अंकाचे खालचा अवळचा वर्गसंख्येचें मूळ काढ. हें मूळ इच्छिल्या मूळाचा पहिला अंक होईल; त्याचा वर्ग पहिल्या भागांतून वजाकरून पहिली बाकी निघेल.

तिसऱ्यानें. त्या बाकीचे उजव्येकडेस सांगीतल्ये संख्येचा दुसरा भाग मांडून तो पहिला भाज्य होईल.

चवथ्यानें. मूळाचा पहिल्या अंकाची दुप्पट करून, ती त्या पहिल्या भाज्याचे उजव्ये कडील एक अंक सोडून त्यांत किती वेळा जाईल तें पहा, पाहिजे तर खालचे (९) प्रमाणें कर; अशानें जो भागाकार येईल, तो इच्छिलेल्या मूळाचा दुसऱ्या अंकस्थळीं मांड; यास पहिल्या अंकाचे दुपटीचे उजव्ये कडेस मांडून त्यास पहिला भाजक ह्मण.

पांचव्यानें. पहिला भाजक मूळाचे दुसऱ्ये अंकानें गुण; जर तो गुणाकार पहिल्या भाज्यापेक्षां अधिक असेल, तर असा केलेला गुणाकार जोंपर्यंत पहिल्या भाज्यापेक्षां कमी येईल, तोंपर्यंत मूळाचे दुसऱ्ये स्थळीं आणि भाजकाचे उजव्ये कडचे स्थळीं त्यापेक्षां लहान अंक मांड, नंतर तो गुणाकार पहिल्या भाज्यांतून वजा करून दुसरी बाकी निघेल.

साहाव्यानें. या दुसऱ्या बाकीचा उजव्येकडेस सांगीतले संख्येचा तिसरा भाग मांडून, दुसरा भाज्य होईल.

सातव्यानें. मूळाचा पहिल्या दोन अंकांची दुप्पट* करून, ही, दुसऱ्ये भाज्याचे उजव्येकडील एक अंक सोडून त्यांत किती वेळा जाईल तें पहा; अशानें जो भागाकार येईल तो इच्छिल्ये मूळाचे तिसरे स्थळीं मांड. आणि यास पहिल्ये दोन अंकांचे दुपटीचे उजव्येकडेस मांडून त्यास दुसरा भाजक ह्मण.

आठव्यानें. पांचव्याप्रमाणें नवी बाकी काढ, आणि सांगीतल्या संख्येंतील सर्व भाग संपतपर्यंत, अशी कृति पुनःपुनः करीत जा; जर शेवटीं कांहीं बाकी राहिली नाहीं, तर वर्गमूळ बरोबर निघालें; बाकी राहिली, तर सांगीतल्ये संख्येला वर्गमूळ नाहीं, ह्मणजे सांगीतल्ये संख्येंतून शेवटील बाकी वजा करून जी संख्या राहाती, तिचेंच तें काढिलेलें वर्गमूळ आहे.

नवव्यानें. भाज्याचे उजव्येकडील अंक आल्यानंतर मूळांतल्ये अंकांची दुप्पट त्यांत जात नाहीं असें जर घडेल, अथवा जेव्हां, एकवेळा जात असतां, १ यानें कृती करून भाज्यापेक्षां अधिक होतात, या दोहों पक्षांत वर्गमूळस्थळीं आणि भाजकस्थळीं शून्य मांडून, सांगीतल्ये संख्येचा पुढील भाग खालीं घे; असें जर पुनः घडेल, तर मूळ आणि भाजक यांवर दुसरें शून्य मांडून, सांगीतल्ये संख्येचा पुढील दुसरा अंक भाग खालीं घे; आणि याप्रमाणें पुढें कर.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

सांगीतल्या संख्या.	वर्गमूळें.
७३४४१	२७१
२९९२९००	१७३०
६४१४२४७९२१	८००८९
९०३६८७८९०६२५	९५०६२५
४२४२०७४७४८२७७६५७६	२०५९६२९७६
१३४२२६५९३१०१५२४०१	११५८५६२०१

१६३. कोणत्याहि अपूर्णांकाचा वर्ग, त्याचे अंश आणि छेद यां-

---

*मूळाचा दुसरा अंक, पहिल्या भाजकाशीं मिळवावा ही वर सांगीतल्यापेक्षां सरळ रीति आहे.

च्या वर्ग केल्यानें होतो, यामुळें अपूर्णांकाचें वर्गमूळ, त्याचे अंश आणि छेद यांचें वर्गमूळ काढण्यानें होतें. जसें, $\frac{२५}{६४}$ याचें वर्गमूळ $\frac{५}{८}$ आहे, का कीं ५×५ हे २५ आहेत, आणि ८×८ हे ६४ आहेत. अंश किंवा छेद, हे दोन्ही वर्गसंख्या नसतील, तर त्या अपूर्णांकास वर्गमूळ नाहीं असा निश्चय नाहीं; का कीं त्याचे अंश आणि छेद कांहीं एकच संख्येनें गुणून, किंवा भागून, (१०८) प्रमाणें ते वर्गसंख्या होतील. जसें, $\frac{२७}{४८}$, यांचें वर्गमूळ नाहीं असें पहिल्यानें दिसतें, परंतु त्यास वर्गमूळ आहे हें खरें, का कीं $\frac{२७}{४८}$ आणि $\frac{९}{१६}$ हे दोन्ही सारिखेच आहेत, आणि $\frac{९}{१६}$ यांचें वर्गमूळ $\frac{३}{४}$ आहे.

१६५. आतां (१५८) या कलमापासून पुढें चालतों. त्या कलमांत असें सांगितलें कीं कोणतीहि संख्या किंवा अपूर्णांक दिला असतां, दुसरा अपूर्णांक किंवा संख्या काढितां येईल, आणि तिचा वर्ग त्या पहिल्या दिलेल्या संख्येचे हवा तेवढा जवळजवळ येईल. उदाहरण, असा एक अपूर्णांक काढ, कीं ज्याचा वर्ग २ होईल, हें कृत्य जरी उलगडत नाहीं, तथापि एक अपूर्णांक असा काढ, कीं ज्याचा वर्ग २ यांशीं ·०००००००१ इतकेच अंतरानें जवळ होईल; हें कृत्य उलगडतां येईल. या अंतरापेक्षांहि लहान अपूर्णांक घेतां येईल; सारांश कांहींएक अपूर्णांक हवा तेवढा लहान घेतां येईल; आणि अशा कृतीनें २ यांचे वर्गमूळा जवळ जवळ तो अपूर्णांक येत जातो असें ह्मणतात. हें कोणत्याहि अवधीपर्यंत या पुढीलप्रमाणें करितां येईल; मनांत आण, कीं २ यांचें वर्गमूळ $\frac{१}{५७}$ इतक्याचे आंत खरें यावें असें इच्छिलें आहे; ह्मणजे $\frac{अ}{ब}$ असा एक अपूर्णांक काढावा, कीं ज्याचा वर्ग २ पेक्षां कमी होईल. परंतु तो असा असावा कीं $\frac{अ}{ब}+\frac{१}{५७}$ यांचा वर्ग २ यांपेक्षां अधिक होईल. $\frac{२}{१}$ याचे अंश आणि छेद ५७ चे वर्गानें, अथवा ३२४९ यांणीं गुण, ह्मणजे $\frac{६४९८}{३२४९}$ होतें. या अपूर्णांकाचे अंशाचें वर्गमूळ काढण्याचे कृतींत, (१६३) प्रमाणें असें दिसतें कीं ९८ बाकी राहातात, आणि ६४९८ याचे खालची वर्ग संख्या ६४०० आहे, आणि तिचें वर्गमूळ ८० आहे. यावरून ८० चा वर्ग ६४९८ यांपेक्षां कमी आहे, परंतु ८१ चा वर्ग त्यापेक्षां अधिक आहे. अपूर्णांकाचे छेदाचें वर्गमूळ अवश्य ५७ आहे. यामुळें $\frac{८०}{५७}$ यांचा वर्ग $\frac{६४००}{३२४९}$ अथवा २ यांपेक्षां कमी आहे, परंतु $\frac{८१}{५७}$ यांचा वर्ग २ यांपेक्षां अधिक आहे, आणि या दोन

अपूर्णांकांचें अंतर केवळ $\frac{१}{५७}$ इतकें आहे यावरून इच्छिलें उत्तर सिद्ध झालें.
१६६. वहिवाटींत कांहीं दशांश पावेतों खरें असें वर्गमूळ काढ-
ण्याची चाल आहे. जसें, २ यांचें चार दशांशस्थळांपावेतों खरें व-
र्गमूळ १·४१४२ आहे, कां कीं १·४१४२ यांचा वर्ग, अथवा
१·९९९९६१६४ हे २ पेक्षां कमी आहेत, परंतु त्यांतलें चवथे दशां-
शस्थळ १ याणें अधिक केलें, तर १·४१४३ होतात, यांचा वर्ग
२·०००२४४४९ आहे, ह्मणजे हा वर्ग २ पेक्षां अधिक आहे. यापेक्षां
एक साधारण पक्ष घे; मनांत आण, कीं चार दशांशस्थळांपावेतों खरें
होण्यास १·६३७ यांचें वर्गमूळ काढायाचें आहे. यांचें अपूर्णांक-
रूप $\frac{१६३७}{१०००}$ आहे, आणि यांचें वर्गमूळ ·०००१, अथवा $\frac{१}{१००००}$ इत-
क्याचे आंत काढायाचें आहे. आतां त्या अपूर्णांकाचा छेद $\frac{१}{१००००}$
यांचा वर्ग होईपर्यंत त्याचे अंश आणि छेद यांवर शून्यें मांड, तर तो
$\frac{१६३७००००००}{१००००००००}$ याप्रमाणें होईल; (१६३) प्रमाणें अंशांचें वर्गमूळ काढून,
असें कळतें कीं त्याचे अति जवळची वर्गसंख्या १६३७००००००–
१३५६४ आहे, जीचें वर्गमूळ १२७९४ आहे. यावरून $\frac{१२७९४}{१००००}$,
अथवा १·२७९४ यांचा वर्ग १·६३७ यापेक्षां कमी आहे, आणि
१·२७९५ यांचा वर्ग १·६३७ यांपेक्षां अधिक होतो. यावरून ते दोन्ही
वर्ग १·६३६८६४३६ आणि १·६३७१२०२५ आहेत.
१६७. अमुक दशांशस्थळांपावेतों खरें वर्गमूळ काढण्याची रीति;
मूळांत जितकीं दशांशस्थळें असावीं, त्या स्थळांची दुप्पट होईपर्यंत वर
शून्यें मांड; आणि या संख्येचे जवळ जवळ वर्गमूळ काढून सांगीतलेले
दशांशांचे अंक खुणेनें वेगळे कर. अथवा त्यापेक्षां ही पुढील रीति
सोपी आहे; सांगीतल्ये संख्येचे दोन दोन अंकांचे भाग कर, असे कीं,
एकं स्थळीचा अंक एका भागाचे उजव्येकडेस येईल; नंतर चालीप्र-
माणें पुढें कर; आणि एकंमाचे उजव्येकडेस दशांश असून, उजव्येक-
डेस नुसता एक अंक असला, तर त्यास खालीं आणतेसमयीं, त्यावर
एक शून्य मांड, आणि त्याचे पुढील प्रत्येक भाग दोन शून्यांचा अ-
सावा. जा भागांत एकं येतो त्याचे मूळाचे उजव्येकडे दशांशचिन्ह मांड.
१६८. उदाहरण, पांच दशांशस्थळांपावेतों १$\frac{३}{८}$ यांचें वर्गमूळ काय
आहे? (१४५) प्रमाणें १$\frac{३}{८}$ हे १·३७५ आहेत, आणि यांचें वर्गमूळ
काढण्याची रीति खालीं दाखविल्याप्रमाणें आहे. सात दशांशस्थळां-

पावेतों ·०८१ यांचें वर्गमूळ काढण्याची रीति खालीं दाखविली आहे, या पक्षांत, पहिला भाग ·०८आहे, परंतु अनुपयोगी शून्य सोडिलें आहे.

```
1̣ १·,३७,५(१·१७२६०
   १
   ----
 २१)३७
     २१
    -----
२२७)१६५०
     १५८९
     -------
२३४२)  ६१००
        ४६८४
        --------
२३४४६) १४१६००
        १४०६७६
        ---------
२३४५२)    ९२४००
```

```
८,१(·२८४६०४९
  ४
  ----
४८)४१०
    ३८४
    ------
५६४)२६००
     २२५६
     -------
५६८६)३४४००
      ३४११६
      ---------
५६९२०४)२८४००००
         २२७६८१६
         ---------
५६९२०८९)५६३१८४००
```

```
·००००० २४१३६७२२२१(·००१५५३५९९
      १
      ----
  २५)१४१
      १२५
      -----
 ३०५)१६३६
      १५२५
      ------
३१०३)१११७२
      ९३०९
      -------
३१०६५)१८६३२२
       १५५३२५
       --------
३१०७०९)३०९९७१०
        २७९६३८१
        ---------
         ३०३३२९००
```

१६९. इच्छिलेल्या दशांशस्थळांचे अर्धापेक्षां अधिक स्थळें निघाल्यावर,(१५५) प्रमाणें केवळ भाज्य, भाजकानें भागून दुसरीं दशांशस्थळें निघतील. हें दाखवायासाठीं, १२ यांचें वर्गमूळ दहा स्थळांपावेतों काढण्याची कृति खालीं लिहिली आहे. परंतु या कृतींत, आणि जवळ जवळ येण्याचे दशांश काढण्याचा सर्व दुसऱ्या कृतींत, ही गोष्ट मनांत धरिली पाहिजे, कीं उजव्येकडचे शेवटील दशांश अंकावर नेहेमीं भरंवसा ठेववत नाहीं; यास्तव खरें होण्यास जीं दशांशस्थळें अगत्य असावीं, त्यांपेक्षां एक किंवा दोन दशांशस्थळें अधिक निघतपावेतों कृति पुढें चालवावी.

(अ)

१२(३·४६४१०१६१५१३
९
६४)३००
२५६
६८६)४४००
४११६
६९२४)२८४००
२७६९६
६९२८१)७०४००
६९२८१
६९२८२०१)११११९००००
६९२८२०१
६९२८२०२६)४२६१७९९|००
४१५६९२१|५६
६९२८२०३२१)१०४८७७|४४००
६९२८२|०३२१
६९२८२०३२२५)३५५९५|४०७९००
३४६४१|०१६१२५
६९२८२०३२३०१)९५४|३९१७७५००
६९२|८२०३२३०१
६९२८२०३२३०२३)२६१|५७१४५११९००
२०७|८४६०९६९०६९
६९२८२०३२३०२६)५३|७२५३५५०८३१

(ब)

६९२८२०३२३०२६)५३७२५३५५०८३१(७७५४५८७०५४९
४८४९७४२२६११८
५२२७९३२४७१२
४८४९७४२२६११
३७८१९०२१०२
३४६४१०१६१५
३१७८००४८७
२७७१२८१२९
४०६७२३५८
३४६४१०१६
६०३१३४२
५५४२५६२
४८८७८०
४८४९७४
३८०६
३४६४
३४२
२७७
६५
६२
३

जर कोणत्येहि बाकीवरचीं शून्यें, आणि त्या शून्यां खालचे किंवा त्यांचे उजव्येकडील सर्व अंक एक्ये उभ्ये रेघेनें वेगळे केले, तर त्या रेघेचे डाव्येकडेस (१५५) प्रमाणें संक्षेप भागाकार सांपडेल. जसें, वरचा उदाहरणांत ३·४६४१०१ इतकीं मूळाचीं स्थळें निघाल्यावर, ४२६१७९९ हे अंक बाकी राहातात, आणि भाजक ६९२८२०२ होतो. जे अंक उभ्ये रेघेचे डाव्येकडेस आहेत, ते वर सांगीतलेली बाकी आणि भाजक यांचा संक्षेप भागाकार आहे. परंतु त्यांत भेद हाच, कीं त्या भाजकांतील सर्व अंक एकदांच कामांत न घेतां, संक्षेप कृतीचा आरंभ करितेसमयीं त्याचे उजव्ये बाजूकडून एक अंक छेंकिला पाहिजे; केवळ याच रितीपासून दशांशाचे स्थळांची दुप्पट झाली असती, आणि पहिले सहास्थळांपेक्षां ६१५१३७ इतकीं अधिक स्थळें मिळालीं असतीं, आणि यांचे शेवटीं जे ७ आहेत, ते ५३ या बाकीशीं संक्षेप भागाकारानें एक पायरी पुढें चालल्यानें उत्पन्न होतात. यामुळें रीति याप्रमाणें आहे; जेव्हां दशांश स्थळांची अर्धी संख्या निघती, तेव्हां बाकीवर दोन शून्यें मांडण्याचे जागीं, कृति पुढें विस्तारानें चालली असतां जो भाजक असेल, त्याचे उजव्येकडील एक अंक छेंकून (१५५) प्रमाणें त्या बाकीला संक्षेप भाजकानें भाग.

मनांत आण, कीं ३·४६४१०१६१५१३ यांपेक्षां दुप्पट स्थळें काढायाचीं आहेत. ५३७२५३५५०८३१ ही बाकी आहे, आणि भाजक ६९२८२०३२३०२६ हा आहे, आणि (ब) प्रमाणें कृति पुढें चालत आहे. यावरून १२ चें वर्गमूळ

३·४६४१०१६१५१३७७५४५८७०५४९ आहे.

हें तर उजव्येकडील शेवटचा अंकापावेतों खरें आहे, परंतु यत्किंचित् अधिक आहे; जर उजव्ये शेवटास ९ यांचे जागीं ८ मांडिले, तर तें कमी होईल.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

संख्या	वर्गमूळें.
·००१७२८	·०४१५६९२१९४
६४·३४	८·०२१२२१८५
८०७४	८९·८५५४३९४
१०	३·१६२२७७६६
·१·५७	१·२५२९९६४०८६१४१६६७७८८४९५

आठवा भाग.

संख्यांचा प्रमाणाविषयीं.

१७०. जेव्हां दोन संख्या कोणत्याहि कृत्यामध्यें सांगितल्या असतात, त्यांस कांहीं एक तऱ्हेनें, पडताळून पहाण्याचें बहुतकरून अगत्य पडतें; ह्मणजे, त्या दोहोंचा परस्पर विचार करून, त्यांचामध्यें असा कांहीं संबंध स्थापावा, कीं तो पुढचे कृतीमध्यें उपयोगी पडेल. हें जाणायासाठीं त्या दोन संख्यांतून मोठी कोणती, व तिचें आणि दुसरीचें अंतर किती आहे हें पहावें ही सरळ रीति आहे. दोन संख्यांमध्यें जो असा संबंध स्थापिलेला असतो, तोच संबंध दुसऱ्या दोन अंकांतहि असेल; उदाहरण, ८ आणि १९ यांचें अंतर ११ आहे, आणि १०० आणि १११ यांचेंहि तितकेंच अंतर आहे. अशा अर्थानें, १०० हे जसे १११ यांस आहेत, तसे ८ हे १९ यांस आहेत, ह्मणजे पहिल्ये दोन संख्यांचें अंतर दुसऱ्या दोन संख्यांचे अंतराबरोबर आहे. सांगीतलेल्या संख्या, ह्मणजे,

८, १९, १००, १११,

ह्या परस्पर **गणितप्रमाणांत** आहेत असें ह्मणतात. अशे तऱ्हेनें चार अंक मांडिले असतां, पहिला आणि शेवटील या अंकांस **आदिअंत** अंक ह्मणतात, आणि दुसऱ्या आणि तिसऱ्या अंकांस **मध्य अंक** ह्मणतात. स्पष्ट आहे, कीं १११+८=१००+१९, ह्मणजे, आद्यंतांची बेरीज मध्यांचे बेरिजेबरोबर आहे. जे एथें विशेष अंक घेतले आहेत, त्यांपासून ही गोष्ट अवचित् घडती असें नाहीं, परंतु प्रत्येक गणित प्रमाणांत असें अवश्य घडतें; का कीं (३५) प्रमाणें १११+८ यांत, १११ तून कांहीं वजा केले, तितकेंच ८ यांत मिळविले, तर बेरिजेंत कांहीं अंतर पडणार नाहीं; आणि वर सांगीतल्या व्याख्यानाप्रमाणें, एक मध्यांक जितका १११ पेक्षां कमी आहे, तितकाच दुसरा मध्यांक ८ पेक्षां अधिक आहे.

१७१. जेव्हां एकादे श्रेणींत जवळ जवळचा कोणत्याहि दोन पदांचें अंतर एकसारिखेंच असतें, तर ते अंक **गणितश्रेणींत** आहेत असें ह्मणतात. ही गोष्ट या पुढील श्रेणींवरून दिसेल;

१, २, ३, ४, ५, इत्यादि.
३, ६, ९, १२, १५, इत्यादि.
$१\frac{१}{२}$, २, $२\frac{१}{२}$, ३, $३\frac{१}{२}$, इत्यादि.

प्रत्येक जवळ जवळचे दोन पदांचे अंतरास उत्तर ह्मणतात. वर सांगीतलेल्या तीन श्रेणींत १, ३, आणि $\frac{१}{२}$, हीं उत्तरें आहेत.

१७२. जर एकाद्या गणित श्रेणींतील कांहीं पदें घेतलीं, तर पहिलें आणि शेवटील या पदांची बेरीज, श्रेणीचा दोन शेवटांपासून सारिखे अंतरावरचा कोणत्याहि दोन पदांचे बेरिजेबरोबर होईल. उदाहरण, श्रेणीचीं ७ पदें घेतलीं आहेत, तीं हीं पुढील आहेत,

अ, ब, क, ड, इ, फ, ग.

तर श्रेणीचे लक्षणावरुन (१७०) प्रमाणें ब जितका अचे वर आहे, तितका फ, गचे खालीं आहे, ह्मणून अ + ग = ब + फ. पुनः (१७०) प्रमाणें क जितका बचे वर आहे, तितकी इ, फचेखालीं आहे, यावरून ब + फ = क + इ. परंतु अ + ग = ब+फ आहे, यामुळें अ + ग = क + इ, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. पुनः दोन्हीं शेवटांपासून सारिख्ये अंतरावरचे पदाची, ह्मणजे मध्य पदाची दुप्पट अद्यंत पदांचे बेरिजेबरोबर आहे, जेव्हां पदांची संख्या विषम असती तेव्हांही वरची गोष्ट घडती; कां कीं क जितका डचे खालीं आहे, तितकी इ, डचे वरतीं आहे, यावरून क+इ=ड+ड=२ड. परंतु क+इ=अ+ग; यामुळें अ+ग=२ड. गणित श्रेणीचे कितीहि पदांची बेरीज काढण्याची संक्षिप्त रीति यावरून निघेल. मनांत आण, कीं वर सांगीतलेलीं ७ पदें दिलीं आहेत. अ+ग, ब+फ, आणि क+इ, या तिन्ही बेरजा सारिख्याच आहेत, यावरून त्या तिहींची बेरीज (अ+ग) चे तिप्पट आहे, यांत जर मध्य पद ड, अथवा अ+गचें अर्ध मिळविलें, तर ती बेरीज तीन वेळा आणि एक अर्धी वेळा अ+ग होईल, अथवा पहिल्या आणि शेवट पदांचे बेरिजेस $३\frac{१}{२}$, अथवा $\frac{७}{२}$, अथवा पदांचे संख्येचें अर्ध इतक्यानें गुणिल्याचे बरोबर होईल. जर पदांची संख्या सम असेल, ह्मणजे जर अ, ब, क, ड, इ, आणि फ, इत्यादि सहा पदें असतील, आणि अ+फ, ब+इ, आणि क+ड हीं सारिखींच आहेत असे कळलें, यावरून त्या पदांची बेरीज अ+फ यांचे तिप्पट आहे, अथवा

पूर्वींप्रमाणें अद्यंताचे बेरिजेस पद संख्येचे अर्धानें गुणावें इतक्या बरोबर त्या सर्व पदांची बेरीज आहे. यावरून रीति ही आहे; गणितश्रेणींतील कितीहि पदांची बेरीज करणें, तर अद्यंतांचे बेरिजेस पदसंख्येचे अर्धानें गुण. उदाहरण, १,२,३, इत्यादि श्रेणींतील ९९ पदें मिळून बेरीज काय होईल? यांत ९९ वें पद ९९ आहे, आणि $(९९+१)\frac{९९}{२}$ अथवा $\frac{१००\times९९}{२}$ अथवा ४९५० ही बेरीज आहे. $\frac{१}{३}$, $\frac{२}{३}$, १, $\frac{४}{३}$, $\frac{५}{३}$, २, इत्यादि श्रेगींचे ५० पदांची बेरीज $(\frac{१}{३}+\frac{५०}{३})\frac{५०}{२}$, अथवा १७×२५, अथवा ४२५ आहे.

१७३. श्रेणींचें पहिलें पद आणि उत्तर आणि पदसंख्या दिली असतां, उत्तर एकोनपद संख्येनें गुणून त्या गुणाकारांत पहिलें पद मिळवावें, ह्मणजे शेवटील पद निघतें. कां कीं दुसरें पद पहिल्ये पदाहून, उत्तरानें भिन्न आहे, तिसरें पद पहिल्ये पदाहून उत्तराचे दुपटीनें भिन्न आहे, चवथें पद उत्तराचे तिपटीनें भिन्न आहे; आणि याप्रमाणें पुढेंहि. अथवा न-१ इतके कृति क्रम केल्यानें पहिल्या पदापासून न पदापर्यंत जातां येतें, त्यांतून प्रत्येक क्रमांत उत्तर मिळवावें लागतें.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

दिलेलीं पदें.		काढायाचीं पदें.	
श्रेण्या.	पदसंख्या.	शेवटील पद.	बेरीज.
४, $६\frac{१}{२}$, ९, इत्यादि	३३	८४	१४५२
१, ३, ५, इत्यादि	२८	५५	७८४
२, २०, ३८ इत्यादि	१०००००	१७९९९८४	८९९९९३०००००

१७४. बेरीज, पदसंख्या, आणि पहिलें पद दिलें असेल, तर त्यापासून उत्तर काढितां येईल. उदाहरण, एका श्रेगींचें पहिलें पद एक, पदसंख्या १००, आणि बेरीज १०००० आहे. पहिलें आणि शेवटील पद यांचे बेरिजेस $\frac{१००}{२}$ यांणीं गुणून १०००० झाले आहेत, ह्मणून जर त्यांस $\frac{१००}{२}$ यांणीं भागिलें, तर आदिअंतांची बेरीज निघेल. आतां $\frac{१००००}{१}$ भागिले, $\frac{१००}{२}$ हे (११२) प्रमाणें २०० आहेत,

आणि पहिलें पद १ आहे, यावरून शेवटलें पद १९९ आहे. यावरून १ पासून १९८ अंकांतून ९९ वेळा सारिख्या कृती केल्या असतां, १९९ पर्यंत जातां येईल. यावरून प्रत्येक पायरी $\frac{१९८}{९९}$, अथवा २ आहे, हें श्रेणीचें उत्तर आहे; अथवा १,३,५, इत्यादि १९९ पर्यंत दिलेली श्रेणी आहे.

दिलेलीं पदें.			काढायाचीं पदें.	
बेरीज.	पदसंख्या.	पहिलें पद.	शेवटील पद.	उत्तर.
१८०९०२५	१३४५	१	२६८९	२
४४	१०	३	$\frac{२९}{५}$	$\frac{१४}{४५}$
७०७५६००	१३३०	४	१०६३६	८

१७५. (१७०) कलमामध्यें दोन संख्या त्यांचे अंतरानें पडताळून पहाण्याचें जें सांगीतलें, त्या गोष्टीचा एथें पुनः विचार करितों. असी पडताळण्याची रीति वहिवाटीचे कामांत आणीत नाहीं, ही गोष्ट परिपाठांतल्या एका उदाहरणापासून कळेल. उदाहरण, **अ** जवळ १०००० रुपये आणि **ब** जवळ ३००० रुपये असतील, तर **ब** पेक्षां **अ** फार द्रव्यवान आहे असें ह्मणण्यांत येईल; परंतु **क** जवळ १०७००० रुपये आणि **ड** जवळ १००००० असतील, अशा दोहोंपक्षांत संपत्तीचें अंतर जरी सारिखेंच ७००० रुपये आहे, तरी **क** हा **ड** पेक्षां फार धनवान आहे असें कोणी ह्मणणार नाहीं. संख्या पडताळण्याचे समयीं केवळ त्यांचें अंतर लक्षांत घेतात असें नाहीं, परंतु त्या संख्याहि लक्षांत आणाव्या लागतात. जसें, **ब** आणि **ड** या दोघांस जर ७००० रुपये मिळाले, तर **ब** जवळ जें पूर्वी द्रव्य होतें, त्यांतील दर १०० स २३३ आणि $\frac{१}{३}$ इतके रुपये मिळतील, परंतु **ड**ला दर १०० स केवळ ७ रुपये मिळतील. आणि जरी (१७०) कलमाचे दृष्टांताप्रमाणें, जितके १०७ यांचे जवळ १०० आहेत, तितके १० चे जवळ ३ आहेत, तथापि जा हेतूनें आतां त्यांचा विचार करितों, त्यावरून जितके १०० हे १०७ यांचे जवळ आहेत, तितके ३ हे १० चे जवळ नाहींत, कां कीं १० आणि ३ यांचें अंतर ३ चे दुपटीपेक्षां अधिक आहे, परंतु १०७ आणि १०० यांचें अंतर १०० चे एक पंचमांशा इतकेंहि नाहीं. यावरून गणिताचे भाषेप्रमाणें, या गोष्टीस असें ह्मणतात, कीं १०७ यांस १००, या **प्रमाणापेक्षां** १० यांस ३ हें **प्रमाण** अधिक आहे.

आतां प्रमाण या शब्दाचा अर्थ अधिक स्पष्ट करून पुढें सांगतों.

१७६. या भागांत पुढें जेव्हां संख्येचा किंवा अपूर्णांकाचा अंश असें लिहिण्यांत येईल, तेव्हां अर्धा भाग, तिसरा भाग, चवथा भाग, इत्यादि जा **सम**भागांत ती संख्या भागिली असेल, त्यांतून १ भाग घेण्याचा आहे असें समजावें; गुणित या शब्दाचा अर्थ पूर्वी (१०२) कलमांत सांगितला आहे. संख्येचे **अंशाचें गुणित**, याचें संक्षेप वाक्य **गुणित अंश** असें आहे. जसें, १,२,३,४, आणि ६ हे, १२ यांचे अंश आहेत; $\frac{१}{२}$ हाहि १२ यांचा एक अंश आहे, कां कीं $\frac{१}{२}$ हा १२ यांत २४ वेळा जातो; १२,२४,३६, इत्यादि हीं १२ यांचीं गुणितें आहेत; आणि ८,९,$\frac{५}{२}$, इत्यादि हे १२ यांचे गुणितांश आहेत, कां कीं ते १२ चा कांहीं भागांचीं गुणितें आहेत. १२ यांस १२ चें एक गुणित ह्मणतात, कां कीं त्याचा गुणक १ आहे, या कारणावरून, जेव्हां विशेषेंकरून गुणित भाग असें बोलण्यांत येतें तेव्हां ते भागहि त्यांत गणिले असतात. गुणितांश यांमध्यें गुणितेंहि येतात; कां कीं सगळे २४ हे ४८ अर्ध भाग आहेत, आणि यामुळें ते १२ चे गुणितांशांत येतात. प्रत्येक अंश वेगवेगळ्या तऱ्हेनें गुणितांश आहे; कां कीं एक चवथा भाग हा दोन आठवे भाग, आणि तीन बारावे भाग आहेत, इत्यादि.

१७७. प्रत्येक संख्या किंवा अपूर्णांक, दुसऱ्या प्रत्येक संख्येचा किंवा अपूर्णांकाचा गुणितांश आहे. जसें १२ हे ७ यांचा कोणता अंश आहे असें विचारिलें असतां, ७ यांस सात समभागांत विभागून, त्यांतून एक अंश १२ वेळा पुनःपुनः घेतला असतां १२ होतात; अथवा ७ यांस १४ समभागांत विभागिले, तर तो प्रत्येक अंश एक अर्धा बरोबर आहे, आणि यांतील १ अंश २४ वेळा पुनःपुनः घेतल्यानें, २४ अर्ध भाग, किंवा १२ होतात. यावरून, १२ हे ७ यांचे $\frac{१२}{७}$, अथवा $\frac{२४}{१४}$, अथवा $\frac{३६}{२१}$ आणि इत्यादि असे आहेत. सामान्यतः जर अ आणि ब हे दोन पूर्ण संख्या असतील, तर ब चा अ कोणता गुणितांश आहे, तें $\frac{अ}{ब}$ दाखवितो, आणि अ चा ब कोणता गुणितांश आहे तें $\frac{ब}{अ}$ दाखवितो. पुनः मनांत आण कीं २$\frac{१}{७}$ हे ३$\frac{१}{५}$ यांचा, किंवा $\frac{१५}{७}$ हे $\frac{१६}{५}$ यांचा कोणता गुणितांश असें विचारिलें आहे. या दोन अपूर्णांकांस समछेद करून, $\frac{७५}{३५}$ आणि $\frac{११२}{३५}$ होतात, यांतून दुसऱ्या अपूर्णांकास ११२

७५ वेळां घेऊन $\frac{७५}{३५}$ हा अपूर्णांक निघतो. यामुळे दुसऱ्या अपूर्णांकाचा $\frac{७५}{११२}$ इतका गुणितांश पहिला अपूर्णांक आहे, असे गुणितांश (१२१) कलमाचे रीति प्रमाणें निघाले, आणि त्यांत भागाकाराविषयीं जी गोष्ट सांगीतली, ती प्रत्येक पक्षांत ब चा अ कोणता गुणितांश आहे हें $\frac{अ}{ब}$, अथवा अ भागिला ब अशानें दाखवितात.

१७८. जेव्हां चार संख्यांतून तिसरी संख्या चवथ्ये संख्येचा जितका गुणितांश असतो, तितकीच जर पहिली संख्या दुसऱ्ये संख्येचा गुणितांश असेल, तर त्या चार संख्या **भूमितिप्रमाणांत**, अथवा सरळ रितीनें **प्रमाणांत** आहेत असें ह्मणतात. प्रमाण हा शब्द व्यवहारांत फार येतो; आणि व्यवहारांत जो अर्थ त्या शब्दास लावितात, तोच अर्थ त्या शब्दाचा वरदिलेल्या गणितानुरूप व्याख्यानांत आहे, इतकें मात्र दाखवायाचें राहिलें. उदाहरण, मनांत आण, कीं एक नकाशाची नकल लहान भागावर करायाची आहे, अशी कीं, मूळचे नकाशावरची दोन इंच लांबीची रेघ, नकलेचे नकाशावर एक इंच आणि एक अर्धा इंच लांबीची असावी; यावरून जर त्या नकाशाचे सर्व अवयव २ होस $१\frac{१}{२}$ याप्रमाणें कमी केले नसतील, तर ती नकल बरोबर नाहीं असें ह्मणतां येईल. दोन इंच ४ भागांत विभागून, त्यांतून तीन भाग घेतल्यानें $१\frac{१}{२}$ होतो, ह्मणून मूळचे नकाशांतील सर्व रेघांशीं त्याच प्रमाणें केलें पाहिजे, ह्मणजे मूळचे नकाशांतील कोणत्येहि रेघेचे चार भाग करून, त्यांतून तीन भागांनीं नकलेंतील रेघ केली पाहिजे. पुनः, व्याजाचा भाव शेंकडा ५ रुपये आहे, ह्मणजे १०० रुपयांचें व्याज ५ रुपये पडतें, तर यावरून दुसऱ्ये कोणत्येहि रकमेचें व्याज देतां येईल; उदाहरण, ७० रुपयांचें व्याज काय होईल, तर ५ रुपये हे १०० रांचा जो अंश आहे, तितका ७० रांचा अंश ७० साठीं घेतला पाहिजे.

तर, जापेक्षां, ब याचा जो अंश अ आहे, तो $\frac{अ}{ब}$, किंवा त्याचे बरोबरीचा कोणत्याहि दुसऱ्या अपूर्णांकानें दाखवितां येतो, आणि ड चा जो अंश क आहे तो $\frac{क}{ड}$ याप्रमाणें दाखवितां येतो, यावरून अ,ब,क, आणि ड हे जेव्हां प्रमाणांत आहेत, तेव्हां $\frac{अ}{ब}=\frac{क}{ड}$. प्रमाणांतील परिमाणांविषयीं जे तर्क करायाचे आहेत, त्यांस या समीकरणाचा

आधार आहे; आणि प्रमाणांतील परिमाणांचा विचार करते-समयीं, केवळ तीं परिमाणेंच लक्षांत आणिल्यानें निर्वाह होत नाहीं, परंतु त्यांचे क्रमहि लक्षांत घेतले पाहिजेत, जसें, अ, ब, क, आणि ड, हे प्रमाणांत आहेत, ह्मणजे ब चा गुणितांश जितका अ आहे, तितकाच डचा गुणितांश क आहे, तथापि अ, ड, ब, आणि क, हे प्रमाणांत आहेत, असें ह्मणतां येत नाहीं, कारण कचा जितका ब गुणितांश आहे, तितकाच डचा गुणितांश अ आहे, हें सिद्ध होत नाहीं. ड पेक्षां क जसा अधिक, किंवा त्याचे बरोबर, किंवा त्यापेक्षां कमी आहे, तसा ब पेक्षां अ अधिक, किंवा त्याचे बरोबर, किंवा त्यापेक्षां कमी, असावा हें स्पष्ट आहे.

१७९. अ, ब, क, आणि ड, अशा क्रमानें ह्या चार संख्या जर प्रमाणांत असतील, तर अ, आणि ड यांस **आदिअंत**, आणि ब आणि क यांस याप्रमाणांचे **मध्य** ह्मणतात. सोईकरितां, आदि अंत, अथवा मध्य पदें यांस **सरूपपदें**, आणि एक शेवटीलपद आणि एकमध्यपद यांस **विरूपपदें** असें ह्मटलें आहे. जसें अ आणि ड, आणि ब आणि क हीं सरूपपदें आहेत; अ आणि ब, अ आणि क, ड आणि ब, ड आणि क हीं विरूपपदें आहेत. प्रमाण दाखविण्याकरितां पदांमध्यें खालचे प्रमाणें बिंदू मांडण्याची रीति आहे, जसें;

अ : ब :: क : ड

१८०. जा संख्या परस्पर बरोबर आहेत, त्या सारिख्येच परिमाणानें वाढविल्या, किंवा कमी केल्या, किंवा गुणिल्या, किंवा भागिल्या, तरी बरोबर राहातील. ही गोष्ट या ह्मणण्याप्रमाणें आहे, कीं जर अ=ब, आणि प=क, तर अ+प = ब+क, अ−प = ब−क, अप = बक, आणि $\frac{\text{अ}}{\text{प}}=\frac{\text{ब}}{\text{क}}$. अ+प−प, अ− प+प, $\frac{\text{अप}}{\text{प}}$, आणि $\frac{\text{अ}}{\text{प}}\times$प हीं सर्व अचे बरोबर आहेत हें स्पष्ट आहे.

१८१. आदिअंतांचा गुणाकार मध्य पदांचे गुणाकाराबरोबर आहे. $\frac{\text{अ}}{\text{ब}}=\frac{\text{क}}{\text{ड}}$ असी कल्पना कर, या दोन बरोबरीचे संख्यांस बडचे गुणाकारानें गुण. तर, $\frac{\text{अ}}{\text{ब}}\times$बड$=\frac{\text{अबड}}{\text{ब}}$ (११६) प्रमाणें=अड, आणि $\frac{\text{क}}{\text{ड}}\times$बड $=\frac{\text{कबड}}{\text{ड}}$=कब; यावरून (१८०) प्रमाणें अड=बक. जसें, ६, ८, २१, आणि २८, ह्या संख्या प्रमाणांत आहेत, का कीं $\frac{६}{८}=\frac{३}{४}$ आणि (१८०)

ते दोन्हीं गुणाकार १६८ आहेत.

१८२. जर दोन संख्यांचा गुणाकार दुसऱ्या दोन संख्यांचा गुणाकाराबरोबर असेल, आणि जर त्यांतील कोणत्याहि गुणाकाराचा दोन संख्या सरूप पदें होतील, अशा रितीनें मांडिल्या तर त्या संख्या कोणत्याहि क्रमानें प्रमाणांत होतील; ह्मणजे, जर अब = पक, तर हीं पुढील प्रमाणें निघतील;—

अ: प :: क : ब	प: अ :: ब : क
अ: क :: प : ब	प: ब :: अ: क
ब: प :: क: अ	क: अ :: ब : प
ब: क :: प : अ	क: ब :: अ: प

यांतून कोणतेंहि एक प्रमाण पडताळून पहाण्यासाठीं, अब आणि पक या दोहोंस त्याचा दुसऱ्या आणि चवथ्या पदांचे गुणाकारानें भाग; उदाहरण, अ: क:: प: ब, यांचा खरेपणा दाखवायासाठीं, अब आणि पक या दोहोंस बक यांणीं भाग. तर $\frac{अब}{बक}=\frac{अ}{क}$, आणि $\frac{पक}{बक}=\frac{प}{ब}$; यावरून (१८०) प्रमाणें $\frac{अ}{क}=\frac{प}{ब}$, अथवा अ: क:: प: ब. वरचे सर्व आठ पक्ष शिकणारानें पडताळून पहावे, आणि कांहीं सरळ उदाहरणें सिद्ध करावीं, जसें $१\times६ = २\times३$, यावरून जसा १:२::३:६, आणि ३:१::६:२, इत्यादि.

१८३. यावरून, जर चार संख्या प्रमाणांत असतील, आणि त्यांतील सरूप पदें सरूप पदांचे स्थळीं रहातील अशा रितीनें जर त्या मांडिल्या, तर त्या चार संख्या कोणत्याहि दुसऱ्या क्रमानें प्रमाणांत होतील. कां कीं, जापेक्षां $\frac{अ}{ब}=\frac{क}{ड}$, तर (१८१) प्रमाणें अड = बक, तेव्हां अड = बक यापासून मागील कलमाप्रमाणें सर्व जीं प्रमाणें होतात, तीं $\frac{अ}{ब}=\frac{क}{ड}$ यापासूनहि होतील.

१८४. (११४) व्ये कलमापासून $१+\frac{अ}{ब}=\frac{ब+अ}{ब}$, असें होतें, आणि जर १ पेक्षां $\frac{अ}{ब}$ कमी असेल, तर $१-\frac{अ}{ब}=\frac{ब-अ}{ब}$, परंतु जर १ पेक्षां $\frac{अ}{ब}$ अधिक असेल, तर $\frac{अ}{ब}-१=\frac{अ-ब}{ब}$. आणि (१२२) प्रमाणें, जर $\frac{अ+ब}{ब}$ यांस $\frac{अ-ब}{ब}$ यांणीं भागिलें, तर भागाकार $\frac{अ+ब}{अ-ब}$ होतो. यावरून, अ, ब, क, आणि ड, हे प्रमाणांत असतील, तर त्यांपासून हीं पुढील दुसरीं प्रमाणें निघतील, जसें;

$\frac{अ}{ब}=\frac{क}{ड}$ आहे असें मनांत आण,

तर (११४) प्रमाणें $१+\frac{अ}{ब}=१+\frac{क}{ड}$

अथवा, $\frac{अ+ब}{ब}=\frac{क+ड}{ड}$

अथवा अ + ब : ब : : क + ड : ड.

ह्मणजे जशी पहिल्या आणि दुसऱ्या पदांची बेरीज, दुसऱ्या पदास आहे, तशी तिसऱ्या आणि चवथ्या पदांची बेरीज, चवथ्या पदास आहे. या वेगळाल्या प्रमाणांविषयीं पुढें शब्दांनीं कांहीं विस्तार करून सांगणार नाहीं, कां कीं शिकणारास आपल्या कल्पनेवरून समजेल.

अ : ब : : क : ड.

अथवा $\frac{अ}{ब}=\frac{क}{ड}$ हें प्रमाण पुनः घे.

जर १ पेक्षां $\frac{अ}{ब}$ कमी असेल, तर $१-\frac{अ}{ब}=१-\frac{क}{ड}$,

अथवा $\frac{ब-अ}{ब}=\frac{ड-क}{ड}$

ह्मणजे, ब–अ : ब : : ड–क : ड,

अथवा जर १ पेक्षां $\frac{अ}{ब}$ अधिक असेल, तर अ–ब : ब : : क–ड : ड.

पुनः, जापेक्षां $\frac{अ+ब}{ब}=\frac{क+ड}{ड}$, आणि १ पेक्षां $\frac{अ}{ब}$ अधिक असून $\frac{अ-ब}{ब}=\frac{क-ड}{ड}$, यांतील पहिलीं दोन पदें दुसऱ्यांनीं भागून $\frac{अ+ब}{अ-ब}=\frac{क+ड}{क-ड}$ असें होतें,

अथवा अ+ब : अ–ब : : क+ड : क–ड.

जर १ पेक्षां $\frac{अ}{ब}$ कमी असेल, तर अ+ब : ब–अ : : क+ड : ड–क.

१८५. अशा तऱ्हेनें अनेक दुसरीं प्रमाणें निघतील. परंतु मागील कलमावरून जीं प्रमाणें निघतात, त्यांतून कांहीं थोडीं दाखवितों.

अ+ब : अ : : क+ड : क

अ : अ–ब : : क : क–ड

अ+क : अ–क : : ब+ड : ब–ड.

यांत आणि सर्व दुसऱ्या पक्षांत ही गोष्ट लक्षांत ठेविली पाहिजे, कीं जेव्हां अ–ब आणि क–ड अशा पद्धती येतात, तेव्हां बपेक्षां अ मोठा, आणि डपेक्षां क मोठा आहे असें समजावें.

१८६. जर चार संख्या प्रमाणांत असतील, आणि त्यांचीं कोणतीं-

माणांत राहातात. जसें, जर अ : ब :: क : ड, आणि म आणि न ह्या भलत्या कांहीं संख्या असतील, तर हीं पुढील प्रमाणें निघतील;

$$मअ : ब :: मक : ड \qquad मअ : नब :: मक : नड$$

$$अ : मब :: क : मड \qquad \frac{अ}{म} : \frac{ब}{म} :: \frac{क}{म} : \frac{ड}{म}$$

$$\frac{अ}{न} : मब :: \frac{क}{न} : मड \qquad \frac{अ}{म} : \frac{ब}{म} :: \frac{क}{न} : \frac{ड}{न}$$

आणि यांशिवाय अनेक दुसरींहि निघतील. यांतील कोणत्याचाहि खरेपणा सिद्ध करितेसमयीं, हें मनांत ठेविलें पाहिजे, कीं चार संख्या परस्पर प्रमाणांत होण्यासाठीं, आदिअंतांचा गुणाकार, मध्यांचे गुणाकाराबरोबर असावा. वरचें तिसरें उदाहरण घेऊन पाहा; त्याचे आदिअंतांचा गुणाकार $\frac{अ}{न}$×मड अथवा $\frac{मअड}{न}$ आहे, आणि त्याचे मध्यांचा गुणाकार मब× $\frac{क}{न}$, अथवा $\frac{मबक}{न}$ आहे. परंतु जापेक्षां अ:ब::क:ड, तर (१८१) प्रमाणें अड=बक, यावरून, (१८०) प्रमाणें मअड=मबक, आणि $\frac{मअड}{न}=\frac{मबक}{न}$. यावरून, $\frac{अ}{न}$, मब, $\frac{क}{न}$, आणि मड, हे प्रमाणांत आहेत.

१८७. जरी एक प्रमाणाचीं पदें दुसऱ्या प्रमाणाचे पदांनीं गुणिलीं, तरी ते वेगळाले गुणाकार प्रमाणांत होतील; ह्मणजे, जर अ:ब::क:ड, आणि प:क::र:स, तर अप:बक::कर:डस असें होईल. कां कीं, जापेक्षां अड=बक आहे, आणि पस=कर आहे, तर (१८०) प्रमाणें अडपस =बककर, अथवा अप×डस=बक×कर, यावरून (१८२) प्रमाणें अप : बक :: कर : डस.

१८८. जर चार संख्या प्रमाणांत असतील, तर त्या संख्यांचे सारिखे घात प्रमाणांत होतील; ह्मणजे, जर

$$अ : ब :: क : ड$$

$$\text{तर } अअ : बब :: कक : डड$$

$$अअअ : बबब :: ककक : डडड$$

इत्यादि. इत्यादि.

कां कीं, जर प्रमाण दोन वेळा मांडिलें, जसें,

अ : ब : : क : ड
अ : ब : : क : ड

तर (१८७) प्रमाणें, अअ : बब : : कक : डड,

परंतु अ : ब : : क : ड

तर (१८७) प्रमाणें, अअअ : बबब : : ककक : डडड; आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

१८९. जेव्हां एकादे पद्धतींत अ, ब, आणि क, इत्यादि दोन किंवा अधिक अक्षरें येतात, आणि त्या पद्धतींतील प्रत्येक पदांमध्यें अ, ब, आणि क ह्याच अक्षरांची सारिखी संख्या असती, त्या पद्धतीस त्या अक्षरांविषयीं सजातीय असें ह्मणतात. जसें, मअअब+नअबक+रककक ही पद्धती अ, ब, आणि क, या अक्षरांविषयीं सजातीय आहे; आणि ती तिसऱ्या वर्णाची आहे, कां कीं त्यांतील प्रत्येक पदांत तीन तीन अक्षरें यावीं, ह्मणून कोठें एकादे पदांत अ, ब, आणि क, हीं अक्षरें आहेत, अथवा त्यांतून एकच अक्षर वारंवार लिहिलें आहे, अथवा एक अक्षर कांहीं वेळा लिहून त्याचे जवळ दुसरें लिहिलें आहे. जसें, ८अअअबक, १२अबककक, मअअअअअ, नअअबबक, हीं सर्व पदें अ, ब, आणि क, या अक्षरांविषयीं मात्र सजातीय आणि पांचव्ये वर्णाचीं आहेत; आणि हीं पदें परस्परांस मिळवून, अथवा परस्परांतून वजाकरून, जी पद्धती उत्पन्न होईल, ती त्या अक्षरांविषयीं सजातीय असून, पांचव्या वर्णाची होईल. पुनः मअ+मनब ही पद्धती, अ आणि ब अक्षरांविषयीं सजातीय आणि पहिल्या वर्णाची आहे; परंतु म आणि न, अक्षरांविषयीं सजातीय नाहीं, तथापि अ आणि न अक्षरांविषयीं सजातीय आहे. इतकें आरंभी सांगितल्यावर आतां एक सिद्धांत*सांगतों त्यांत (१८४),(१८५) आणि (१८८), या कलमांतील गोष्टी येतील.

१९०. जर चार संख्या प्रमाणांत असतील, आणि जर अ आणि ब अशा दोन पहिल्या संख्यांपासून, सारिख्याच वर्णाचा कोणत्याहि दोन सजातीय पद्धती उत्पन्न केल्या, आणि शेवटील दोन संख्यांपासून,

---

*सिद्धांत ह्मणजे गणितांतील खरी गोष्ट आहे; जसें, ज्या संख्येचे उजव्येकडील शेवटाचे दोन अंक चोहोंनीं निःशेष भागिले जातात, ती सर्व संख्या चोहोंनीं निःशेष भागिली जाईल हा एक सिद्धांत आहे; प्रत्येक प्रमाणांत आदिअंतांचा गुणाकार, मध्यांचे गुणाकाराबरोबर आहे, हा दुसरा सिद्धांत आहे.

वरचे सारिख्या दुसऱ्या दोन पद्धती उत्पन्न केल्या, तर ह्या चार पद्धती प्रमाणांत होतील. उदाहरण, जर अ: ब:: क: ड आणि २अअअ +३अअब आणि बबब+अबब ह्या दोन्हीं, अ आणि बयांविषयीं सजातीय असून तिसऱ्या वर्णाचा आहेत; आणि जर अ आणि ब पासून जशा पूर्वीचा दोन पद्धती निघाल्या, तशा २ककक+३ककड आणि डडड+कडड ह्या क आणि ड यांपासून झाल्या असतील, तर

२अअअ+३अअब : बबब+अबब :: २ककक+३ककड : डडड+ कडड ला होईल.

हें सिद्ध करायास, $\frac{\text{अ}}{\text{ब}}$ दाखवायासाठीं क्ष घे. तर, जापेक्षां $\frac{\text{अ}}{\text{ब}}$=क्ष, आणि $\frac{\text{अ}}{\text{ब}}=\frac{\text{क}}{\text{ड}}$, यामुळें $\frac{\text{क}}{\text{ड}}$=क्ष. परंतु जापेक्षां अ यास ब याणें भागिल्यानें क्ष होतो, तर क्ष यास ब यानें गुणिल्यानें अ होईल, अथवा अ=बक्ष. तशेच कारणानें, क=डक्ष.' वरचा चार दिलेल्या पद्धतींमध्यें अ आणि क यांचें जागीं बक्ष आणि डक्ष मांड, आणि ही गोष्ट मनांत ठेविली पाहिजे कीं, अनेक परिमाणें परस्पर गुणून, त्यांची रचना कोणत्याहि क्रमानें केली, तरी गुणाकार सारिखेच होतील; ह्मणजे, बक्षबक्षबक्ष आणि बबबक्षक्षक्ष ह्या पद्धती सारिख्याच आहेत.

यावरून, २अअअ+३अअब = २बक्षबक्षबक्ष+३बक्षबक्षब
= २बबबक्षक्षक्ष+३बबबक्षक्ष

ही तर बबब गुणिली २क्षक्षक्ष+३क्षक्ष असी आहे,
अथवा बबब(२ क्षक्षक्ष+३क्षक्ष)*

याच सारिखें, २ककक+३ककड = डडड(२क्षक्षक्ष+३क्षक्ष)
आणि, बबब + अबब = बबब + बक्षबब
= बबब गुणिला १+क्ष
अथवा = बबब(१+क्ष)
याचसारिखें, डडड + कडड = डडड(१+क्ष)
आतां, बबब : डडड :: बबब : डडड

---

* अ आणि बविषयीं कोणतीहि पद्धती सजातीय असेल, आणि त्या पद्धतींत अचे जागीं बक्ष मांडिला तर शिकणाराला सहज दिसेल, कीं त्या पद्धतींत जितकीं अंकस्थळें आहेत तितक्या वेळा वारंवार पदामध्यें ब येईल, जसें, अअ+अब हो बक्षबक्ष+बक्षब अथवा, बब×(क्षक्ष+क्ष) असी होईल; अअअ+ बबब, ही पद्धती बक्षबक्षबक्ष+ बबब, अथवा बबब(क्षक्षक्ष+१) असी होईल; आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

यावरून (१८६) प्रमाणें, बबब(२क्षक्षक्ष + ३क्षक्ष) : डडड (१+क्ष) :: बबब(२क्षक्षक्ष + ३क्षक्ष) : डडड(१+क्ष) असें आहे, ह्मणून त्या पद्धतीचे बरोबर वर पद्धती निघाल्या, त्यांस ह्यांचे जागीं मांडल्या असतां याप्रमाणें होतें, २अअअ+३अअब : बबब+अबब :: २ककक + ३ककड : डडड+कडड. कोणत्याहि दुसऱ्या पक्षास हीच कल्पना लागू होईल, आणि या पुढील सिद्धांताचा खरेपणा शिकणारास अशे तऱ्हेनें दाखवितां येईल;

जर अ: ब :: क : ड

तर २अ+३ब : ब :: २क+३ड : ड

अअ+बब : अअ–बब :: कक+डड : कक–डड

मअब : २अअ+बब :: मकड : २कक+डड

१९१. जर प्रमाणांतील दोन मध्य पदें सारिखींच असतील, ह्मणजे जर अ : ब :: ब : क, तर अ, ब, आणि क, ह्या तीन संख्या **अखंड** प्रमाणांत, अथवा **भूमिती श्रेणींत** आहेत असें ह्मणतात. ज्या श्रेणीचीं एका पुढील एक अशीं कोणतींहि तीन पदें अखंड प्रमाणांत असतील, त्या श्रेणीस वरचें नाव देतात, जसें,

$$१ \quad २ \quad ४ \quad ८ \quad १६ \quad ३२ \quad ६४ \quad \text{इत्यादि.}$$

$$२ \quad \frac{२}{३} \quad \frac{२}{९} \quad \frac{२}{२७} \quad \frac{२}{८१} \quad \frac{२}{२४३} \quad \frac{२}{७२९} \quad \text{इत्यादि.}$$

हीं अखंड प्रमाणांत आहेत, कां कीं

१ : २ :: २ : ४	$२ : \frac{२}{३} :: \frac{२}{३} : \frac{२}{९}$
२ : ४ :: ४ : ८	$\frac{२}{३} : \frac{२}{९} :: \frac{२}{९} : \frac{२}{२७}$
इत्यादि.	इत्यादि.

१९२. अ, ब, क, ड, इ, इत्यादि अखंड प्रमाणांत आहेत, असें मनांत आण; तर

अ : ब :: ब : क अथवा $\frac{अ}{ब} = \frac{ब}{क}$ अथवा अक = बब

ब : क :: क : ड अथवा $\frac{ब}{क} = \frac{क}{ड}$ अथवा बड = कक

क : ड :: ड : इ अथवा $\frac{क}{ड} = \frac{ड}{इ}$ अथवा कइ = डड

पद होतें.

असें, (१८०) प्रमाणें ब $= \frac{ब}{अ} \times$ अ; क $= \frac{क}{ब} \times$ ब; आतां जापेक्षां $\frac{अ}{ब} = \frac{ब}{क}$, $\frac{ब}{अ} = \frac{क}{ब}$, अथवा क $= \frac{ब}{अ} \times$ ब. पुन: ड $= \frac{ड}{क} \times$ क, परंतु $\frac{ड}{क} = \frac{क}{ब}$, आणि $\frac{क}{ब} = \frac{ब}{अ}$; यामुळें ड $= \frac{ब}{अ} \times$ क, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. यावरून $\frac{ब}{अ}$ यास श्रेणीचें **साधारण गुणोत्तर** ह्मणतात, आणि त्याचे जागीं र घेतला असतां, या पुढील प्रमाणें होईल,

ब = अर   क = बर = अरर   ड = कर = अररर

आणि याप्रमाणें पुढेंहि; यावरून

अ   ब   क   ड   इ   इत्यादि ही श्रेणी
अ   अर   अरर   अररर   अरररर   इत्यादि. याप्रमाणें

यावरून अ : क : : अ : अरर   आहे.

(१८६) प्रमाणें   : : अअ : अअरर
: : अअ : बब

कां कीं, ब = अर आहे, तर बब = अरअर अथवा अअरर. पुन:,

अ : ड : : अ : अररर

(१८६) प्रमाणें   : : अअअ : अअअररर
: : अअअ : बबब

आणि अ : इ : : अअअअ : बबबब, आणि याप्रमाणें पुढेंहि.
ह्मणजे पहिलें पद आणि तें सोडून न पद या दोहों मधलें प्रमाण, पहिल्या पदाचा न घात, आणि दुसऱ्या पदाचा न घात या दोहों मधील प्रमाणाबरोबर आहे.

१९३. अखंड प्रमाणांतील पदांचें सर्वधन काढण्याची सोपी रीति काढितां येईल. १, र, रर, इत्यादि, पदांचें सर्वधन काढण्याची इच्छा आहे असें मनांत आण, आणि यांत एकापेक्षां र अधिक आहे असें मनांत आण. कोणत्योहि पद्धतींत कांहीं संख्या मिळवून, ती लागलीच वजा केल्यानें त्या पद्धतीमध्यें भेद होत नाहीं. उदाहरण,

प = प − क + क − र + र − स + स

आतां, १, र, रर, इत्यादि या श्रेणीचीं चार पदें, अथवा

१+र+रर+ररर घे

स्पष्ट आहे, कीं

रररर − १ = रररर − ररर + ररर − रर + रर − र + र − १

आतां (५४) प्रमाणें रर − र = र (र − १), ररर − रर = रर(र − १), रररर − ररर = ररर (र − १), आणि वरचें समीकरण याप्रमाणें होतें, रररर − १ = ररर (र − १) + रर (र − १) + र (र − १) + र − १ ; हें (५४) प्रमाणें ररर + रर + र + १ यांस र − १ वेळा घेतले असे आहेत. यावरून, रररर−१ यांस र−१ यांणीं भागिलें, तर १+र+रर+ररर होतात, हें पदांचें सर्वधन आहे. याच तऱ्हेनें समीकरणाची ही पुढील श्रेणी सिद्ध होईल.

$$१ + र = \frac{रर-१}{र-१}$$

$$१ + र + रर = \frac{ररर-१}{र-१}$$

$$१ + र + रर + ररर = \frac{रररर-१}{र-१}$$

$$१ + र + रर + ररर + रररर = \frac{ररररर-१}{र-१}$$

जर एकापेक्षां र कमी असेल, तर १ + र + रर+ररर यांचें सर्वधन काढायासाठीं, लक्षांत ठेविलें पाहिजे, कीं

१ − रररर = १ − र + र − रर + रर − ररर + ररर − रररर

= १ − र + र (१ − र) + रर (१ − र) + ररर (१ − र);

यावरून, वरचे कल्पनेंप्रमाणें, १+र + रर +ररर ही १−रररर यांस १−र यांणीं भागिल्यानें होईल; ह्मणजे अशानें वरचे सारिखींच समीकरणें निघतील,

$$१ + र = \frac{१-रर}{१-र}$$

$$१ + र + रर = \frac{१-ररर}{१-र}$$

$$१ + र + रर + ररर = \frac{१-रररर}{१-र}$$

$$१ + र + रर + ररर + रररर = \frac{१-ररररर}{१-र}$$

रीति; १+र+रर+इत्यादि, असे श्रेणीचे **न** पदांचें सर्वधन काढायासाठीं, १ आणि (न+१) वें पद यांची वजाबाकी, १ आणि र यांचे वजाबाकीनें भाग.

१९४. अखंड प्रमाणाचीं कितीहि पदें असलीं, तरी त्यांचें सर्वधन काढायास वरची रीति लागू होती. अ, ब, क, इत्यादि, पदें आहेत, त्यांतून चार पदांपर्यंत सर्वधन इच्छिलें आहे, ह्मणजे अ+ब+क+ड यांचें सर्वधन काढायाचें आहे; हें (१९२) प्रमाणें, अ+अर+अरर+अररर असें आहे, अथवा (५४) प्रमाणें अ(१+र+रर+ररर), हें (१९३) प्रमाणें जर र एकापेक्षां अधिक किंवा कमी असेल, तर $\frac{रररर-१}{र-१}\times अ$, अथवा $\frac{१-रररर}{१-र}\times अ$, असें होईल. यांतून पहिला अपूर्णांक $\frac{अरररर-अ}{र-१}$ आहे, अथवा (१९२) प्रमाणें $\frac{इ-अ}{र-१}$ असा आहे. त्याचसारिखा, दुसरा अपूर्णांक $\frac{अ-इ}{१-र}$ असा आहे. यामुळें रीति हीच आहे; कोणत्याहि अखंड प्रमाणाचा **न** पदांचें सर्वधन काढायासाठीं, $\overline{न+१}$ वें पद आणि पहिलें पद यांची वजाबाकी, एक आणि पदांचें गुणोत्तर यांचे वजाबाकीनें भाग. उदाहरण, १+३+९+२७+ इत्यादि या श्रेणीचे १० पदांचें सर्वधन काढायाचें आहे असें मनांत आण. या श्रेणीचें ११ वें पद ५९०४९ आहे, आणि $\frac{५९०४९-१}{३-१}=$ २९५२४ हें सर्वधन आहे. पुनः, $२+१+\frac{१}{२}+\frac{१}{४}+$ इत्यादि या श्रेणीचे १८ पदांचें सर्वधन काढायाचें असेल, तर तिचें एकुणिसावें पद $\frac{१}{१३१०७२}$ आहे, यावरून $\frac{२-\frac{१}{१३१०७२}}{१-\frac{१}{२}}=३\frac{१३१०७०}{१३१०७२}$ हें सर्वधन आहे.

उदाहरणें.

१+४+१६+ इत्यादि या श्रेणीचा ९ पदांचें सर्वधन ८७३८१ आहे.
$३+\frac{६}{७}+\frac{१२}{४९}+$ . . . . १० . . . . $\frac{८४७४२२६७५}{२०१७६८०३५}$ . .
$\frac{१}{२}+\frac{१}{४}+\frac{१}{८}+$ . . . . २० . . . . $\frac{१०४८५७५}{१०४८५७६}$ . . .

१९५. जी संख्या किंवा अपूर्णांक एकापेक्षां अधिक आहे, तिचे घात वाढत जातात; कां कीं जापेक्षां $२\frac{१}{२}$ हे १ पेक्षां अधिक आहेत, $२\frac{१}{२}\times२\frac{१}{२}$ यांत $२\frac{१}{२}$ हे एक वेळेपेक्षां अधिक वेळा घेतले आहेत, ह्मणजे तो

होत जातो; ह्मणजे, कसाहि [illegible]
दा घात त्याहून अधिक होईल. हें सिद्ध करायासाठीं, लक्षांत आणिलें पाहिजे, कीं २$\frac{१}{२}$ यांचा प्रत्येक घात त्याचे पूर्वीचे घातास २$\frac{१}{२}$ यांणीं, अथवा १+१$\frac{१}{२}$ यांणीं गुणिल्यानें होतो, ह्मणजे पूर्वींचे घातास तोच घात आणि त्याचें अर्ध मिळविल्यानें पुढचा दुसरा घात होतो. यामुळें १० वें पद करायासाठीं, जें ९ वे घातास मिळविलें, त्यापेक्षां ११ वें पद करायास, १० व्ये घातास अधिक मिळवावें लागतें. परंतु स्पष्ट आहे कीं कोणतेंहि सांगितलें परिमाण, कसेंहि लहान असलें, आणि तें वारंवार २$\frac{१}{२}$ यांशीं मिळविलें, तर त्याचें सर्वधन, कोणतीहि दुसरी सांगितली संख्या कसीहि मोठी असेल, तरी तिजपेक्षां अधिक होईल; यामुळें २$\frac{१}{२}$ यांस प्रत्येक पायरीवर मिळविण्याचें परिमाण अधिक अधिक वाढवीत गेलें असतां, सर्वधन खचित् अधिक मोठें होईल, यावरून २$\frac{१}{२}$ यांचे एका पुढले एक घात काढिल्यावरून असा पक्ष दिसेल. आणि हेंहि स्पष्ट आहे, कीं १ याचा घात कधीं वाढत नाहीं, कां कीं तो नेहमी १ आहे; जसें, १×१=१, इत्यादि. आणि, जर म वेळा ब पेक्षां अ अधिक असेल, तर अचा वर्ग मम वेळा बचे वर्गाहून अधिक होईल. जसें, जर अ=२ब+क, यांत २ब पेक्षां अ अधिक आहे, तर अचा वर्ग, अथवा अअ, (६८) प्रमाणें ४बब+४बक+कक, हा ४बब पेक्षां अधिक आहे, आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

१९६. जो अपूर्णांक एकापेक्षां कमी आहे त्याचे घात उत्तरोत्तर घटत जातात; जसें, $\frac{२}{५}$ यांचा वर्ग, अथवा $\frac{२}{५}$×$\frac{२}{५}$ हे $\frac{२}{५}$ पेक्षां कमी आहेत, कां कीं $\frac{२}{५}$ चा वर्ग केवळ दोन पंचमांशाचे दोन पंचमांश आहे. ही घट अनंत होत जाईल; ह्मणजे असें अतिलहान परिमाण नाहीं, कीं त्याहून $\frac{२}{५}$ यांचा एकादा घात कमी होणार नाहीं. कां कीं जर $\frac{५}{२}$=क्ष तर $\frac{२}{५}$=$\frac{१}{क्ष}$, आणि $\frac{२}{५}$ यांचे घात $\frac{१}{क्षक्ष}$, $\frac{१}{क्षक्षक्ष}$, इत्यादि असे आहेत. ज्यापेक्षां १ हून क्ष अधिक आहे, तर (१९५) प्रमाणें कांहीं सांगितल्या परिमाणापेक्षां अधिक असा एकादा क्षचा घात काढितां येईल. या घाताला म ह्मण; तर $\frac{१}{म}$ हा $\frac{२}{५}$ यांतील क्षचा घाताचे वर्णांचा घात आहे; आणि अपूर्णांकाचा छेद हवा तेवढा मोठा केल्यानें, तो अपूर्णांक (११२) प्रमाणें हवातेवढा लहान होईल.

१ र रर ररर रररर इत्यादि.

पहिल्यानें. जर १ पेक्षां र अधिक आहे, तर वरची श्रेणी वाढत्या पदांची होईल. **दुसऱ्यानें.** जर १चे बरोबर र असेल, तर पदांचा किमती सारिख्याच होतील. **तिसऱ्यानें.** जर १ पेक्षां र कमी असेल, तर श्रेणी घटत्या पदांची होईल. पहिल्ये दोन पक्षांत

$$१+र+रर+ररर+\text{इत्यादि}$$

यांतील, पदांची संख्या पुरतेपणी वाढविली असतां, त्यांचें सर्वघन हवें तेवढें मोठें करितां येईल हें स्पष्ट आहे. परंतु तिसऱ्या पक्षांत असें घडेल, किंवा घडणारहि नाहीं; कां कीं जरी प्रत्येक पायरीला कांहीं मिळविलें असतें, तथापि तें मिळविण्याचें परिमाण प्रत्येक पायरीस घटतें, यावरून तें परिमाण किती वेळा मिळविलें तरी उत्तर हवें तेवढें मोठें करितां येईल, असें खचित् ह्मणतां येत नाहीं. ही गोष्ट दाखवायासाठीं या पुढील श्रेणीचा विचार कर,

$$१+\frac{१}{२}+\frac{१}{४}+\frac{१}{८}+\frac{१}{१६}+\text{इत्यादि},$$

ही श्रेणी किती पुढें वाढविली, तरी तिचें सर्वघन २ चे बरोबर करायासाठीं, तिचे उजव्येकडील शेवटील पदाइतकें मिळविलें पाहिजे. जसें,

$$(१+\frac{१}{२}+\frac{१}{४})+\frac{१}{४}=१+\frac{१}{२}+\frac{१}{२}=१+१=२.$$

$$(१+\frac{१}{२}+\frac{१}{४}+\frac{१}{८})+\frac{१}{८}=२.$$

$$(१+\frac{१}{२}+\frac{१}{४}+\frac{१}{८}+\frac{१}{१६})+\frac{१}{१६}=२,\ \text{इत्यादि}.$$

परंतु वरचे श्रेणीमध्यें प्रत्येक पद त्याचे पूर्वीचे पदाचे केवळ अर्धाबरोबर आहे; यामुळें कितीहि पदें घेतलीं, तरी त्यांचे पुढील दुसरें एक पद त्यांशीं मिळविलें तरी २ याचे बरोबर कधींहि होणार नाहीं. यामुळें, १, $\frac{१}{२}$, $\frac{१}{४}$, $\frac{१}{८}$, इत्यादि यांचें सर्वधन निरंतर २ यांचे जवळजवळ होत जातें, ह्मणून प्रत्येक पायरीवर सर्वधनाचें आणि २ चें अंतर कमी होत जातें, परंतु त्याचे बरोबर कधींहि होत नाहीं. यावरून २ यांस $१+\frac{१}{२}+\frac{१}{४}+$ इत्यादि, या श्रेणीची **नियतता** ह्मणतात. यावरून **प्रत्येक** उतरती श्रेणीला नियतता आहे, असा निश्चय करवत नाहीं. या गो-

ष्टीचें उलटें या सरळ श्रेणीवरून दाखवितां येईल, ह्मणजे, $१+\frac{१}{२}+\frac{१}{३}+\frac{१}{४}+$ इत्यादि, ही या पुढीलप्रमाणें मांडितात.

$१+\frac{१}{२}+(\frac{१}{३}+\frac{१}{४})+(\frac{१}{५}+\cdots\frac{१}{८}$ पावेतों$),+(\frac{१}{९}+\cdots\frac{१}{१६}$ पावेतों$)+$ $(\frac{१}{१७}+\cdots\frac{१}{३२}$ पावेतों$)+$इत्यादि.

पहिल्या दोन पदांशिवाय अशा तऱ्हेनें सर्व श्रेणीचे निरनिराळे भाग केले आहेत, आणि प्रत्येक भागांत शेवटील पदाचा छेदांत जितके एकं आहेत, त्यांचे निमें पदें प्रत्येक भागांत येतात. जसें, चवथ्ये भागांत १६ अथवा $\frac{३२}{२}$ पदें येतात. हा प्रत्येक भाग $\frac{१}{२}$ पेक्षां अधिक आहे हें दाखवितां येईल. तें दाखविण्यास तिसरा भाग घे, ह्मणजे, $\frac{१}{९}, \frac{१}{१०}, \frac{१}{११}, \frac{१}{१२}, \frac{१}{१३}, \frac{१}{१४}, \frac{१}{१५}$, आणि $\frac{१}{१६}$ असा आहे. $\frac{१}{१६}$ या शेवटील पदा खेरीज सर्व दुसरीं पदें $\frac{१}{१६}$ यापेक्षां अधिक आहेत; यामुळें त्या प्रत्येक पदाचे जागीं $\frac{१}{१६}$ मांडिला असतां, त्या भागांतील सर्व पदांची बेरीज पूर्वींपेक्षां कमी होईल; आणि जापेक्षां असें केल्यानें त्यांची बेरीज $\frac{८}{१६}$, किंवा $\frac{१}{२}$ होती, तर ते सर्व भाग पूर्वींचे $\frac{१}{२}$ पेक्षां अधिक होतील. आतां, $१+\frac{१}{२}$ यास निरंतर $\frac{१}{२}$ मिळविला, तर केव्हां तरी त्याचें सर्वधन कोणत्येहि सांगितल्ये संख्येपेक्षां अधिक होईल. तर $\frac{१}{२}$ याचे जागीं, वरचा वेगळाल्या भागांचीं पदें निरनिराळीं एकामागें एक मिळविलीं असतां, त्यांचें सर्वधन पूर्वींपेक्षां खचित् अधिक असावें. परंतु $१+\frac{१}{२}+\frac{१}{३}$, इत्यादि अशा तऱ्हेनें वरची श्रेणी केली आहे, यावरून जी वरची गोष्ट सांगितली ती सिद्ध होती, ह्मणजे या श्रेणीस कांहीं नियतता नाहीं.

१९८. जेव्हां १ पेक्षां र कमी आहे, तेव्हां १+र+रर+ररर+इत्यादि, या श्रेणीस नेहेमी नियतता आहे. हें सिद्ध करायासाठीं, मनांत आण, कीं जा पदावर थांबतों त्याचे पुढील पद अ आहे, तर (१९४) वरून तिचें सर्वधन $\frac{१-अ}{१-र}$ अथवा (११२) प्रमाणें $\frac{१}{१-र}-\frac{अ}{१-र}$ आहे. या श्रेणीचीं पदें (१९६) प्रमाणें अनंत घटत जातात, यावरून पहिल्या पदापासून दुसरें पुढलें पद इतकें लांब घेतां येईल, कीं अ, आणि यामुळें $\frac{अ}{१-र}$ हवा तेवढा लहान होईल. परंतु जरी स्पष्ट आहे, कीं $\frac{१}{१-र}$ यापेक्षां $\frac{१}{१-र}-\frac{अ}{१-र}$ हे नेहमी कमी आहेत, तथापि $\frac{१}{१-र}$ याचे हवे तेवढे जवळ करितां येतील; ह्मणजे १+र+रर+इत्यादि ही श्रेणी $\frac{१}{१-र}$ या नियततें जवळ उत्तरोत्तर येईल. जसें $१+\frac{१}{२}+\frac{१}{४}+\frac{१}{८}+$ इत्यादि या श्रेणींत $र=\frac{१}{२}$,

कलमांत सांगीतलें.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

$$२ + \frac{२}{३} + \frac{२}{९} + \text{इत्यादि.}$$

अथवा $२(१ + \frac{१}{३} + \frac{१}{९} + \text{इत्यादि})$ याची नियतता ३ आहे.

$$१ + \frac{९}{१०} + \frac{८१}{१००} + \text{इत्यादि.} \quad \cdots\cdots\cdots \quad १० \quad \cdots$$

$$५ + \frac{१५}{७} + \frac{४५}{४९} + \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad ८\frac{३}{४} \quad \cdots$$

१९९. जेव्हां $\frac{अ}{ब}$ हा अपूर्णांक $\frac{क}{ड}$ याचे बरोबर नाहीं, परंतु त्यापेक्षां अधिक आहे, तेव्हां क आणि ड यांचे प्रमाणापेक्षां अ आणि ब यांचें प्रमाण अधिक आहे असें ह्मणतात; आणि जेव्हां $\frac{अ}{ब}$ हा $\frac{क}{ड}$ यापेक्षां कमी आहे, तेव्हां क आणि ड यांचे प्रमाणापेक्षां अ आणि ब यांचें प्रमाण कमी आहे. या व्याख्यानावर हीं पुढील उदाहरणें अभ्यासासाठीं सांगतों.

पहिलें. जर बपेक्षां अ अधिक असेल, आणि डचाबरोबर किंवा कमी क असेल, तर क आणि ड यांचे प्रमाणापेक्षां अ आणि ब यांचें प्रमाण अधिक होईल.

दुसरें. बपेक्षां जर अ कमी असेल, आणि क हा डचाबरोबर किंवा त्यापेक्षां अधिक असेल, तर अ आणि ब यांचें प्रमाण, क आणि ड यांचे प्रमाणापेक्षां कमी होईल.

तिसरें. क जसा डला तसा अ जर बला असेल, आणि जर क आणि क्ष यांचे प्रमाणापेक्षां अ आणि ब यांचें प्रमाण अधिक असले, तर क्षपेक्षां ड कमी होईल; आणि जर क आणि क्ष यांचे प्रमाणापेक्षां अ आणि ब यांचें प्रमाण कमी असेल, तर क्षपेक्षां ड अधिक होईल.

चवथें. अक्ष आणि बक्ष+य यांचे प्रमाणापेक्षां अ आणि ब यांचें अधिक प्रमाण आहे, आणि अक्ष आणि बक्ष−य यांचे प्रमाणापेक्षां अ आणि ब यांचें कमी प्रमाण आहे.

२००. क आणि ड यांचे प्रमाणापेक्षां जर अ आणि ब यांचें

ब यांचे प्रमाणापेक्षां कमी होईल, परंतु क आणि ड यांचे प्रमाणापेक्षां अधिक होईल ; अथवा $\frac{अ}{ब}$ आणि $\frac{क}{ड}$ या दोन अपूर्णांकांतून $\frac{अ}{ब}$ अधिक असेल, तर $\frac{अ+क}{ब+ड}$ हें $\frac{क}{ड}$ यापेक्षां अधिक, परंतु $\frac{अ}{ब}$ यापेक्षां कमी होईल. हें सिद्ध करायासाठीं, लक्षांत ठेविलें पाहिजे, कीं $\frac{मक्ष+नय}{म+न}$ यांत क्ष आणि य बरोबर नसतील, तर तो अपूर्णांक क्ष आणि य यांचेमध्यें असावा ; कां कीं क्ष आणि य या दोहोंतून क्ष कमी असेल, तर $\frac{मक्ष+नक्ष}{म+न}$ किंवा क्ष पेक्षां तो अपूर्णांक खचित् मोठा होईल; आणि जर त्या दोहोंतून य मोठा असेल, तर $\frac{मय+नय}{म+न}$, किंवा य पेक्षां तो अपूर्णांक खचित् कमी होईल. यामुळें क्ष आणि य यांचेमध्यें तो अपूर्णांक येतो. आतां $\frac{अ}{ब}$ = क्ष आणि $\frac{क}{ड}$ = य असे घे; तर अ=बक्ष आणि क=डय. आतां वर सिद्ध केल्याप्रमाणें $\frac{बक्ष+डय}{ब+ड}$ हा अपूर्णांक क्ष आणि य यांचे मध्यें येतो; यामुळें $\frac{अ+क}{ब+ड}$ हा अपूर्णांक $\frac{अ}{ब}$ आणि $\frac{क}{ड}$ यांचे मध्यें येतो. पुनः, जापेक्षां $\frac{अ}{ब}$ आणि $\frac{क}{ड}$ हे $\frac{अप}{बप}$ आणि $\frac{कक्क}{डक्क}$ यांचे अनुक्रमें बरोबर आहेत, आणि जापेक्षांवर सिद्ध केल्याप्रमाणें, $\frac{अप+कक्क}{बप+डक्क}$ हा अपूर्णांक पहिल्या दोहोंचे मध्यें येतो, यामुळें तो दुसऱ्या दोहोंमध्येंहि येतो; ह्मणजे, प आणि क्क हे कांहीं संख्या किंवा अपूर्णांक असतील, तरी $\frac{अप+कक्क}{बप+डक्क}$ हा $\frac{अ}{ब}$ आणि $\frac{क}{ड}$ यांचा मध्यें येतो.

२०१. जा अवघड पद्धती आहेत, त्यांची किंमत अदमासानें समजायास मागील कलमावरून कांहीं कल्पना करितां येईल. जसें $\frac{१+क्ष}{१+क्षक्ष}$ हा $\frac{१}{१}$ आणि $\frac{क्ष}{क्षक्ष}$, किंवा १ आणि $\frac{१}{क्ष}$ यांचे मध्यें येतो; $\frac{अक्ष+बय}{अक्षक्ष+बबयय}$ हा $\frac{अक्ष}{अक्षक्ष}$ आणि $\frac{बय}{बबयय}$, अथवा $\frac{१}{क्ष}$ आणि $\frac{१}{बय}$ यांचे मध्यें येतो. वर दाखविलें, कीं $\frac{अ+ब}{२}$ हा अपूर्णांक अ आणि ब यांचा मध्यें येतो, येथें त्याचा छेद १+१ अशानें होतो.

२०२. $\frac{अ+ब+क+ड}{प+क्क+र+स}$ हा अपूर्णांक $\frac{अ}{प}$, $\frac{ब}{क्क}$, $\frac{क}{र}$, आणि $\frac{ड}{स}$, यांचामध्यें आहे, ह्मणजे तो अपूर्णांक यांतून जें मोठें पद त्यापेक्षां कमी, आणि जें अति लहान पद त्यापेक्षां अधिक आहे, असें सिद्ध करितां येईल. हे अपूर्णांक त्यांचे महत्वानुसारानें मांड ; ह्मणजे $\frac{अ}{प}$ हा $\frac{ब}{क्क}$ पेक्षां अधिक असावा, $\frac{ब}{क्क}$ हा $\frac{क}{र}$ पेक्षां अधिक असावा, आणि $\frac{क}{र}$ हा $\frac{ड}{स}$ पेक्षां अधिक असावा. तर (२००) प्रमाणें

$\frac{[illegible]}{प+क}$ [illegible] $\frac{[illegible]}{प}$ [illegible] $\frac{[illegible]}{क}$ आणि $\frac{[illegible]}{र}$

$\frac{अ+ब+क}{प+क+र}$ $\frac{अ+ब}{प+क}$ आणि $\frac{अ}{प}$ यापेक्षां कमी आहे, $\frac{क}{र}$ आणि $\frac{ड}{स}$ यापेक्षां अधिक आहे

$\frac{अ+ब+क+ड}{प+क+र+स}$ $\frac{अ+ब+क}{प+क+र}$ आणि $\frac{अ}{प}$ $\frac{ड}{स}$

यावरून वर सांगीतलेली प्रतिज्ञा उघड आहे.

२०३. अ हा ब पेक्षां मोठा, आणि अ हा बपेक्षां लहान, हें लिहिण्याची चाल फारकरून अ > ब आणि अ < ब अशी आहे; यांत मुख्यत्वेंकरून कोनाचें तोंड मोठ्ये परिमाणाकडे असावें. शिकणारानें या चिन्हाशीं पक्कें माहित व्हावें.

नववा भाग.

संयोग आणि व्युत्क्रमसंयोग यांविषयीं.

२०४. निरनिराळ्या अक्षरांचा अनेक चकत्या पुढें ठेऊन, त्यांतून वारंवार चार चार काढायाच्या असतील, तर त्या किती तऱ्हांनीं काढितां येतील, याविषयीं विचार करितों. त्यांतील प्रत्येक तऱ्हेला चोहों चोहोंचा **संयोग** ह्मणतात, परंतु त्यांतून चोहों चोहोंची **निवड** करणें असें ह्मणणें हें त्यापेक्षां योग्य आहे. दोन संयोग, किंवा दोन निवडी यांत कोणत्याहि तऱ्हेचा फेर असला, तर त्यांस भिन्न असें ह्मणतात; जसें **अबकड** आणि **अबकइ** हे भिन्न आहेत, कां कीं एकामध्यें **ड** आहे आणि दुसऱ्यामध्यें **इ** आहे, परंतु दोहोंमध्यें दुसरीं अक्षरें सारिखींच आहेत. **अ**, **ब**, **क**, **ड**, **इ**, आणि **फ**, अशा साहा चकत्या आहेत, त्यांतून तिहीं तिहींचे संयोग वीस तऱ्हांनीं पुढील प्रमाणें होतील;

अबक	अकइ	बकड	बइफ
अबड	अकफ	बकइ	कडइ
अबइ	अडइ	बकफ	कडफ
अबफ	अडफ	बडइ	कइफ
अकड	अइफ	बडफ	डइफ

आणि त्या सहा चकत्यांतून चार चार अक्षरांचे संयोग पंधरा तऱ्हांनीं होतील, ह्मणजे याप्रमाणें;

अबकड	अबडइ	अकडइ	अडइफ	बकइफ
अबकइ	अबडफ	अकडफ	बकडइ	बडइफ
अबकफ	अबइफ	अकइफ	बकडफ	कडइफ

आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

२०५. वरचा प्रत्येक संयोग अनेक वेगळाल्ये क्रमानीं मांडितां येईल; ह्मणजे, **अबकड** हा या पुढील कोणत्याहि क्रमानें मांडितां येईल;

अबकड	अकबड	अकडब	अबडक	अडबक	अडकब
बअकड	कअबड	कअडब	बअडक	डअबक	डअकब
बकअड	कबअड	कडअब	बडअक	डबअक	डकअब
बकडअ	कबडअ	कडबअ	बडकअ	डबकअ	डकबअ

यांतून कोणत्याहि दोन संयोगांत अक्षरांची रचना एकसारिखी नाहीं. ह्मणून प्रत्येक संयोगास **अबकड** याचा **व्युत्क्रमसंयोग** ह्मणतात. तथापि **संयोग** रूपानें ते सर्व सारिखेच आहेत, कां कीं अ, ब, क, आणि ड, हीं चार अक्षरें प्रत्येकांत आहेत.

२०६. अनेक चकत्या दिल्या असतां, जसें सहा, त्यांतून दोन दोन, तीन तीन, इत्यादि, चकत्यांचे **व्युत्क्रमसंयोग** किती तऱ्हांनीं होतील, याचा आतां शोध करितों. चार चकत्यांचे जे सगळे व्युत्क्रमसंयोग होतील, ते जर करितां आले, तर पांच चकत्यांचे व्युत्क्रमसंयोग या पुढीलप्रमाणें होतील. चार अक्षरांचा चार चकत्या घे, जसें

अबकफ यांत **ड** आणि **इ** नाहींत; तर त्या चार चकत्यांचे व्युत्क्रमसंयोगाचे शेवटीं, **ड** आणि **इ** हीं अक्षरें मांडिलीं असतां, पुढील प्रमाणें होतें, **अबकफड**, **अबकफइ**, आणि प्रत्येक चार चकत्यांचे व्युत्क्रमसंयोगाशीं तसीच कृति कर; जसें, **डअबक** यापासून **डअबकइ** आणि **डअबकफ** असें होतें. चार चकत्यांचे सर्व व्युत्क्रमसंयोग समजल्यावर वरचे रितीप्रमाणें चाललें असतां, पांच चकत्यांचा कोणताहि व्युत्क्रमसंयोग, दृष्टि चुकून जाणार नाहीं; कां कीं पांच चकत्यांचा कोणताहि व्युत्क्रमसंयोग, जसें **डबफइअ**, कृति करत्ये समयीं **डबफइ** यापासून निघेल, ह्मणजे, वर सांगीतल्ये रितीप्रमाणें तो **डबफइअ** असा होतो. रितीप्रमाणें कृति केली असतां, कोणताहि व्युत्क्रमसंयोग दोन वेळा एकसारिखाच येणार नाहीं, कां कीं **डबफइअ** हा केवळ **डबफइ** यापासून होतो.

अ ब क ड इ फ

या सहा चकत्यांतून, कोणत्याहि दोन चकत्यांचे व्युत्क्रमसंयोग काढायास वरचे रितीप्रमाणें चाललें, तर त्या प्रत्येकाचे पांच व्युत्क्रम संयोग होतील, जसें,

अ यापासून **अब अक अड अइ अफ** होतात.
ब . . . . . **अब बक बड बइ बफ** इत्यादि होतात,
आणि ह्या सर्व चकत्यांचे व्युत्क्रमसंयोग ६×५ अथवा ३० होतात.
पुनः **अब** यापासून **अबक अबड अबइ अबफ** होतात.
अक . . . . . **अकब अकड अकइ अकफ** इत्यादि होतात.
आणि त्यांत दोन चकत्यांचे ६×५ अथवा ३० व्युत्क्रम संयोग होतात, ते प्रत्येक ३ चकत्यांचे व्युत्क्रम संयोग असे ४ होतात; यामुळें या शेवटीलांचे सर्व व्युत्क्रम संयोग ६×५×४ अथवा १२० इतके होतात.
पुनः **अबक** यापासून **अबकड अबकइ अबकफ** होतात.
अबड . . . . . **अबडक अबडइ अबडफ** इत्यादि होतात.
आणि यांत तीन चकत्यांचे ६×५×४ अथवा १२० इतके व्युत्क्रम संयोग होतात, त्या प्रत्येकांत चार चकत्यांचे ३ व्युत्क्रम संयोग होतात; यामुळें या शेवटीलांचे सर्व व्युत्क्रम संयोग ६×५×४×३, अथवा ३६० इतके होतात. तशीच तऱ्हेनें, ५ चकत्यांचे व्युत्क्रम संयोग ६×५×४×३×२ होतात, आणि सहा चकत्यांचे व्युत्क्रम संयोग किंवा, जित-

५×४×३×२×१ हे आहेत. हीं शेवटील दोन उत्तरें सारिखींच हें खरें आहे; कां कीं पांच चकत्यांचे व्युत्क्रम संयोगांत केवळ एक चकती सोडिली जाती, तर सोडलेले चकतीपासून, सहा चकत्यांचा केवळ एक व्युत्क्रम संयोग होतो. सहा चकत्यांचे जागीं कोणतीहि दुसरी संख्या घेतली, जसें क्ष, तर त्यांतून दोन चकत्यांचे व्युत्क्रम संयोगांची संख्या क्ष(क्ष−१), तीन चकत्यांचे व्युत्क्रम संयोगांची संख्या क्ष(क्ष−१)(क्ष−२), चार चकत्यांचे व्युत्क्रम संयोगांची संख्या क्ष(क्ष−१)(क्ष−२)(क्ष−३), अशा होतील; यावरून रीति हीच आहे; चकत्यांची सर्व संख्या त्यांचें जवळचे खालचें संख्येनें गुण, नंतर तो गुणाकार त्याचे दुसरे खालचे अंकानें गुण, आणि प्रत्येक व्युत्क्रम संयोगांत जितक्या चकत्या असावयाचा तितक्या वेळा चकत्यांचा संख्या, पहिल्यापासून गुणाकार होईतोंपर्यंत पुढें करीत चाल; जो गुणाकार येईल तो इच्छिल्या व्युत्क्रम संयोगांची संख्या होईल. जसें, १२ चकत्यांतून चार चकत्यांचे व्युत्क्रम संयोग १२×११×१०×९ अथवा ११८८० एवढे होतील.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

२०७. ८ बैठकींवर ८ पुरुषांची किती वेगवेगळ्या तऱ्हांनीं रचना करितां येईल? उत्तर ४०३२०.

आठ पुरुषांस वर्तुळाकृती बसवायाचें आहे, असें कीं त्यांतून कोणत्येहि दोन रचनेंत, प्रत्येक पुरुषाचें स्थान सारखें होणार नाहीं, अशे तऱ्हेनें त्या पुरुषांचा किती रचना करितां येतील? उत्तर ५०४०.

पंधरा पुरुषांचा जितक्या वेगवेगळाल्या रचना करितां येतील, त्यांतील प्रत्येक रचनेस, जर १ पैचा शंभरावा अंश दिला तर सर्व मिळून काय द्यावें लागेल?

उत्तर ६८१०८०४० रुपये.

सत्रा व्यंजनें आणि पांच स्वर असले, तर, एक शब्दांत दोन व्यंजनें आणि एक स्वर, असे त्यांपासून किती शब्द होतील?

उत्तर ४०८०.

गांची संख्या येती, त्यापेक्षां जेव्हां दोन किंवा अधिक चकत्यांवर सारिखींच अक्षरें असतात, तेव्हां व्युत्क्रम संयोगांची संख्या कमी येती. **अ, अ, अ, ब, क, ड,** अशा सहा चकत्या आहेत, तर **अ** मध्यें भेद दाखविण्या करितां त्यांस **अ, अ′, अ″,** याप्रमाणें क्षणभर मांड, तर रिती प्रमाणें **अबकअ′अ″ड,** आणि **अ″बकअअ′ड,** हे वेगवेगळे व्युत्क्रम संयोग आहेत, परंतु स्वर चिन्हें नसलीं, तर ते तसे नाहींत, याजकरितां अशे अक्षरांचे वेगवेगळे व्युत्क्रम संयोग काढायासाठीं **ब, क,** आणि **ड,** हे घेऊन, एक व्युत्क्रम संयोग कर, आणि अचीं वेगवेगळीं स्थळें पुढील प्रमाणें रिकामीं ठेव; जसें, ( ) **बक** ( ) ( ) **ड.** जर, **अ, अ′, अ″,** इत्यादि तऱ्हेनें अचा भेद ठेविला असेल, तर वरचा कुंडलींतलीं रिकामीं स्थळें भरल्यानें, ३×२×१ इतके वेग वेगळे व्युत्क्रम संयोग होतील, आणि जर अमध्यें कांहीं भेद दाखविला नाहीं, तर ते सहा व्युत्क्रम संयोग एक सारिखेच होतील. यावरून **अअ′अ″बकड** यापासून **अ, अ, अ, ब, क, ड,** यांचे व्युत्क्रम संयोगांची संख्या काढायासाठीं, पहिल्याचे व्युत्क्रम संयोग ३×२×१ अथवा ६ यांणीं भागिले पाहिजेत, त्यापासून $\frac{६\times५\times४\times३\times२\times१}{३\times२\times१}$ अथवा १२० होतात. त्याच प्रमाणें **अअअअबबबकक,** यांचे युत्क्रमसंयोगांची संख्या $\frac{९\times८\times७\times६\times५\times४\times३\times२\times१}{४\times३\times२\times१\times३\times२\times१\times२\times१}$ इतकी आहे.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

अ, न, ट, ए, ट, र, ए, न, ऐ, ट, अ, र, ए, अ, न, हीं अक्षरें किती वेगवेगळ्या तऱ्हानीं रचितां येतील ?

उत्तर, १२६१२६०००.

२०९. व्युत्क्रम संयोगांपासून संयोग सहज काढितां येतात, परंतु, हे संयोग निरनिराळे करायासाठीं, (२०६) कलमांत जी रीति सांगितली, त्याप्रमाणें एथें रीति दाखवितों. **अ, ब, क, ड, इ,** यांतून दोनदोन अक्षरांचे संयोग करायास समजले, तर त्या दोहों दोहोंचे संयोगांचे शेवटीं, त्यांचे उजवे कडचीं अक्षरें एकामागें एक मांडून, तीन तीन अक्षरांचे संयोग काढितां येतील. जसें, **अब** यापासून **अबक, अबड,**

अबइ, होतात; अड यापासून केवळ अडइ होतो. दोन अक्षरांचे संयोग समजल्यावर अशा रितीनें चाललें असतां, कोणताहि तीन अक्षरांचा संयोग दृष्टि चुकून जाणार नाहीं; कां कीं अकड, याप्रमाणें तिहींचा कोणताहि संयोग, कृति करिल्येसमयीं अक पासून निघेल, ह्मणजे वरचे रिती प्रमाणें त्यापासून अकड होतो. कोणताहि संयोग दोन वेळा येणार नाहीं, कां कीं रिती प्रमाणें चाललें असतां, अकड हा केवळ अक पासून निघेल, तो अड आणि कड यांपासून कधींहि निघणार नाहीं. या तऱ्हेनें खालचे पांच अक्षरांचे संयोग काढले असतां या प्रमाणें होतील,

अ ब क ड इ

अ	पासून	अब	अक	अड	अइ	होतात.
ब	....		बक	बड	बइ	.....
क	....			कड	कइ	.....
ड	....				डइ	.....

आणि अब पासून	अबक	अबड	अबइ
अक		अकड	अकइ
अड			अडइ
बक		बकड	बकइ
बड			बडइ
कड			कडइ

अब बइ कइ आणि डइ यांपासून कांहीं होत नाहीं.

आणि अबक पासून अबकड अबकइ होतात.

अबड	अबडइ
अकड	अकडइ
बकड	बकडइ

वर प्रमाणें अबइ, अकइ, अडइ, बकइ, बडइ, कडइ, यांपासून कांहीं होत नाहीं. अबकड यापासून अबकडइ होतो, दुसऱ्यांपासून कांहीं होत नाहीं हें स्पष्ट आहे, कां कीं पांच वस्तूंपासून पांचांची एकच निवड होती.

काढण्याचे रीती वरून सरळ निघतो. ७ चकत्या घ; तर, जापेक्षां दोहों दोहोंचे व्युत्क्रम संयोगांची संख्या ७×६ इतकी आहे, आणि जापेक्षां **बअ** आणि **अब** असे दोन व्युत्क्रम संयोग, **अब** अशा संयोगांतून निघतात, तर संयोगांची संख्या व्युत्क्रम संयोगांचे संख्येचे अर्धाबरोबर आहे, ह्मणजे $\frac{७\times६}{२}$. जापेक्षां तिहिं तिहींचे व्युत्क्रम संयोगांची संख्या ७×६×५ असी आहे, आणि जापेक्षां **अबक** अशा प्रत्येक संयोगाचे ३×२×१ व्युत्क्रम संयोग होतात, तर तिहिंतिहींचा संयोगांची संख्या $\frac{७\times६\times५}{१\times२\times३}$ आहे. आणि जा पेक्षां **अबकड** अशे चोहोंचोहोंचे संयोगापासून ४×३×२×१ इतके व्युत्क्रम संयोग होतात, तर चोहोंचोहोंचे संयोगांची संख्या $\frac{७\times६\times५\times४}{१\times२\times३\times४}$ आहे, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. यावरून रीति याप्रमाणें आहे. **न** चकत्यांचे संयोगांची संख्या काढायासाठीं, त्या **न** चकत्यांचे व्युत्क्रम संयोगांचे संख्येस १×२×३, इत्यादि **न** पावेतों अंकांचे गुणाकारानें भाग. जर सर्व चकत्यांची संख्या दाखवायास **क्ष** घेतला, तर त्यांतून दोहोंदोहोंचे संयोगांची संख्या $\frac{क्ष(क्ष-१)}{१\times२}$ आहे; तीन अक्षरांचे संयोगांची संख्या $\frac{क्ष(क्ष-१)(क्ष-२)}{१\times२\times३}$ आहे; चोहोंचे संयोगांची संख्या $\frac{क्ष(क्ष-१)(क्ष-२)(क्ष-३)}{१\times२\times३\times४}$ आहे; आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

२११. कांहीं पक्षांत या रितीस पुढील प्रमाणें सरळ रूप देतां येईल. दहा चकत्यांतून जितक्ये वेळा सात चकत्यांची निवड होती, तितक्या वेळा तीन तीन चकत्यांचे संयोग बाकी रहातात. यावरून जितके सातांचे संयोग होतील, तितकेच तिहींचे संयोग होतात. ह्मणून सातांचे संयोग काढण्याबद्दल तिहींचे संयोग काढल्यानें कार्य होईल; यावरून, या दोन संयोगांचा संख्या काढण्याचा सारिणी, जरी रूपानें भिन्न आहेत, तरी त्यांचें उत्तर सारिखेंच येतें असें निश्चयें ह्मणतां येईल. आणि तसेंच सिद्ध होतें; कां कीं दाहांतून सातांचे संयोगांची संख्या $\frac{१०\times९\times८\times७\times६\times५\times४}{१\times२\times३\times४\times५\times६\times७}$ आहे, यांत अंश आणि छेद या दोहीं स्थळीं ७×६×५×४ हा गुणाकार येतो, ह्मणून (१०८) प्रमाणें तो दोहोंतून छेकून टाकला, तर $\frac{१०\times९\times८}{१\times२\times३}$ असें राहातें, ह्मणून दहांतून तिहींचे संयोगांची संख्या ही आहे. याप्रमाणें दुसऱ्या कोणत्याहि पक्षांत दाखवितां, येईल.

बारा वस्तूंतून चोहोंचोहोंचे संयोग किती होतील ?

उत्तर. ४९५.

८, ११, २८, १५	यांतून	६, ४, २६, ६	यांचे संयोग किती होतील ?

उत्तर. २८, ३३०, ३७८, ५००५

५२ वस्तूंतून तेरातेरांचे संयोग किती करितां येतील ?

उत्तर. ६३५०१३५५९६००.

दुसरें पुस्तक.

व्यवहारी गणित.

पहिला भाग.

वजनें, मापें, इत्यादि.

२१२. पहिल्या पुस्तकांत जा कृती दाखविल्या आहेत, त्यांशिवाय व्यवहारी कामाकरितां, दुसऱ्या कृतींचें प्रयोजन लागत नाहीं. आतां आपल्ये गणनेचा खरेपणाची खात्री व्हावी इतकेंच केवळ नाहीं, परंतु या गणनेचीं उत्तरें ताडून, त्यांजविषयीं कांहीं निश्चय करणें, ही एक गोष्ट राहिली आहे. यापूर्वीं (१५) प्रमाणें एक जातीचा एकं मात्र कामांत आणिला, आणि जीं परिमाणें अनेक एकंमानीं झालेलीं आहेत तीं, दुसऱ्या, तिसऱ्या, आणि चवथ्या, भागांत आहेत, आणि जीं

सहावा, या भागांत सांगितली आहेत. असें, लांबीविषयीं बोलते समयीं, एकं दाखवायासाठीं एक मैल घेतल्यानें, अनेक मैलांची, किंवा एक मैलाचे अनेक भागांची लांबी, पूर्ण किंवा अपूर्णांकानें दाखवितां येईल;* आणि त्यांत १ हा एक मैल आहे असें मानिलें पाहिजे. परंतु पुष्कळ पक्षांत या गोष्टीपासून अडचणीं येतील असें दिसेल. मनांत आण कीं एका खोलीचीं लांबी मैलाचा $\frac{१}{१८०}$ आहे, आणि दुसऱ्ये खोलीची लांबी मैलाचा $\frac{१}{१७४}$ आहे, असें ह्मटलें तर दुसरी खोली, पहिली पेक्षां किती लांब आहे, याचा समज कसा होईल ! हें समजण्यासाठीं मैलापेक्षां कांहीं लहान माप असावें; आणि जर एक मैलास १७६० सम्भागांत विभागून, त्या प्रत्येक भागास एक यार्ड असें नाव दिलें, तर पहिल्ये खोलीची लांबी ९ यार्ड आणि एक यार्डाचे $\frac{७}{९}$ आहे, आणि दुसऱ्ये खोलीची लांबी १० यार्ड आणि एक यार्डाचे $\frac{१०}{८७}$ आहे असें दिसेल. यावरून या वेगवेगळाल्ये लांब्यांचा पूर्वीपेक्षां चांगला समज होतो, परंतु त्यांत $\frac{७}{९}$ आणि $\frac{१०}{८७}$ हे अपूर्णांक आहेत ह्मणून, पुरतेपणीं चांगला समज होत नाहीं. तो पुरता समज करून घेण्याकरितां एका यार्डाचे तीन समभाग केले आहेत असें मनांत आण, आणि यांतून

---

*एकं दाखविण्यासाठीं कोणतेंहि परिमाण घेतलें, तर त्याच जातीचें दुसरें कांहीं परिमाण अनेक एकंमानी, अथवा एक एकंमाचे अनेक भागानीं, बरोबरच दाखवितां येतें, ही गोष्ट खरी नाहीं. हा विषय शिकते समयीं जें शिकणाराचें ज्ञान असेल, त्याहून वर सांगीतलेली गोष्ट सिद्ध करून समजून घेण्यासाठीं, त्याचा आगीं अधिक समज आला पाहिजे; परंतु याविषयीं जी काय त्याची समजूत असेल, ती खोटी आहे हें आतां दाखवितों. एक फूट लांबीची एक रेघ घे, तिचे दहा समभाग कर, त्यांतून प्रत्येक भागाचे पुनः दहा समभाग कर, आणि याप्रमाणें पुनः पुनः करीत जा. जर असें त्या रेघेचें दशांश भागणें अनंतपर्यंत चालविलें आणि त्या रेघेंत अदमासानें एक अ बिंदू घेतला, तर तो बिंदू त्यांतील कोणतेहि दशांश भाग स्थळींच येईल असा निश्चय करवत नाहीं; आणि जरी त्या रेघेचे सात किंवा अकरा किंवा दुसरे कांहीं समभागांत भाग केले, तरी तो अ बिंदू बरोबर भाग स्थळींच येईल असेंहि घडणार नाहीं. यावरून एक फुटाचा कोणत्याहि अपूर्णांकानें दाखवितां येणार नाहीं, असा कांहीं फुटाचा भाग असेल; आणि ही गोष्ट गणितांतील मोठे विषयांत नेहमीं घडती असें दिसून येईल. जा शब्दावर ही टीप सांगीतली त्या शब्दापासून असें समजावें, कीं एके फुटाचा कांहीं भाग, गणितरूप अपूर्णांकानें हवा तितका जवळ जवळ दाखवितां येईल, आणि व्यवहारांत याहून अधिक सूक्ष्मपणाची गरज लागत नाहीं.

फुटी आहेत, आणि एक [illegible] फुटीचे $\frac{१}{३}$ पेक्षां कांहीं अधिक आहे. यामुळें पहिल्ये खोलीची लांबी ९ यार्ड, २ फुटी, आणि एक फुटीचा $\frac{१}{३}$ आहे; आणि दुसऱ्ये खोलीची लांबी १० यार्ड आणि एक फुटीचे $\frac{१}{३}$ पेक्षां कांहीं अधिक आहे. यावरून मोठ्या परिमाणासाठीं मोठीं मापें, आणि लहान परिमाणासाठीं लहान मापें, असल्यानें सुलभ पडतें असें दिसतें; परंतु केवळ सोईसाठीं मात्र असें असावें, कां कीं एका पेक्षां अधिक मापें असल्यानें कोणत्याहि जातीचा परिमाणाशीं गणना करितां येती, त्याचप्रमाणें केवळ एक माप असल्यानेंहि करितां येईल; परंतु नुसती गणना एक मापानें होती इतकेंच केवळ नाहीं, परंतु गणना करण्यास एका मापानें फार सोपें पडतें.

अंक गणित आणि पदार्थ विज्ञान यांत चांगले प्रविण, अशा पुरुषांनीं एकाच काळीं जा मापांचे ठराव केले असते, त्यांसारिखीं मापें हालीं या देशांत नाहींत. आतां पदार्थ विज्ञानाचे परिणाम, मापांचे ठराव करण्यासाठीं कोणत्या रितीनें उपयोगांत आणले आहेत हें दाखवितों. ज्योतिषापासून सांपडलेलें परिमाण कदाचित् हारवलें, तर तें परिमाण काढण्याविषयींचा रितींत जा गोष्टी पुढें सांगीतल्या आहेत, त्यांचे माहितीवरून त्या रिती खऱ्या आहेत किंवा नाहींत, याविषयीं मतभेद आहे; परंतु व्यवहार कामासाठीं त्या रिती पुरतेपणीं खऱ्या आहेत, याविषयीं कांहीं संशय नाहीं.

वजनें आणि मापें हीं नेहमीं एक सारिखींच असावीं, आणि त्यांतून एकादें मुळारंभींचें माप कदाचित् सांडलें असतां, त्याचा पुनः कसा ठराव करावा, याची सर्वांस अपेक्षा असती हें उघड आहे. एक यार्डाचें खरें माप हालीं इंग्रेजी सरकारांत ठेविलें असलें; परंतु जर कांहीं अपायानें त्याचा नाश झाला, तर यापुढें पांचशें वर्षानंतरचा मनुष्यांस त्यांचे वडील जास यार्ड असें ह्मणत होते, त्याची लांबी कसी कळेल? हें कळायासाठीं जें कांहीं मनुष्याचा मतलबानें, किंवा अपायानें बदलवणार नाहीं, त्यापासून असें माप घेतलें पाहिजे. सूर्य मंडळांमध्यें कांहीं अकस्मात् आश्चर्यकारक फेरफार झाला नाहीं, तर ज्योतिषांत दाखविल्याप्रमाणें पृथ्वीचा एक दिवसाचा फिरण्याचा काळ,

आणि एक वर्षाचे लांबीचा काळ, हीं दोन्हीं एकसारिखींच शेंकडों वर्षांपावेतों राहातील, ह्मणून या दोन काळांपासून मापाचें परिमाण सांपडतें. जोंपर्यंत ज्योतिष शास्त्राचा अभ्यास चालत आहे, तोंपर्यंत या दोन काळांतून कोणता एक काळ सांडेल, असी कल्पना करण्यास अशक्य आहे, आणि एक दिवसाचे दुपारपासून, दुसऱ्या दिवसाचे दुपारपर्यंत जो काळ जातो तो, ह्मणजे सूर्याचा एक मध्यान्हापासून दुसऱ्या मध्यान्हपर्यंत जो काळ जातो, त्या काळाचे ३६५$\frac{1}{4}$ अथवा ३६५·२४२२४ इतके मध्यान्ह दिवस एक वर्षाची लांबी असें माहित आहे. हालीं वर्षाची लांबी ३६५ दिवस धरितात, आणि दिवसाचा एक चतुर्थांश वर राहातो, त्याबदल प्रति चवथ्या वर्षीं एक दिवस अधिक वाढवितात, त्या वर्षास अधिक दिवसाचें वर्ष ह्मणतात. हें आणि प्रतिवर्षीं $\frac{1}{4}$ दिवस वाढविणें हीं सारखींच आहेत, आणि हें वाढविणेंहि कांहीं अधिक आहे, कां कीं वर्षाची लांबी ३६५ दिवसांवर ·२५ इतकी नाहीं, परंतु दिवसाचें ·२४२२४ इतकी आहे. यावरून दिवसाचे ·००७७६ इतकें अंतर पडतें, ह्मणून इतक्यानें आपलें वर्ष अधिक आहे. हें अंतर १२८ वर्षांत एक दिवसाबरोबर होतें, अथवा ४०० वर्षांत तीन दिवसांबरोबर होतें. यावरून वर्षांचे शतकाचे शेवटील वर्ष एक अधिक दिवसाचें असतें, अशीं तीन वर्षें एकाधिक दिवसाचीं न केलीं, आणि चवथें वर्ष एकाधिक दिवसाचें केलें, तर वर सांगीतलेली कसर बरोबर होती. जसें सन् १६०० च्या वर्षास एकाधिक दिवस वर्ष ह्मटलें तर १७०० वें, १८०० वें, १९०० वें, हीं वर्षें एक अधिक दिवसाचीं नाहींत, परंतु सन् २००० वें, वर्ष एकअधिक दिवसाचें होईल.

२१३. यावरून पहिलें सांपडलेलें माप एक दिवस आहे, आणि त्यास २४ भागांत किंवा अवरांत विभागिलें आहे, प्रत्येक अवरास ६० भागांत किंवा मिनिटांत विभागिलें आहे, आणि प्रत्येक मिनिटास ६० भागांत किंवा सेकंदांत विभागिलें आहे. यावरून एक सेकंद, एक दिवसाचा ८६४०० वा भाग आहे, आणि काळाचें मान या पुढीलप्रमाणें आहे.

६० सेकंद ह्मणजे	१ मिनिट	....	१ मि०
६० मिनिटें	१ अवर	......	१ अ०
२४ अवर	१ दिवस	......	१ दि०
७ दिवस	१ आठवडा	....	१ आ०
३६५ दिवस	१ वर्ष	....	१ व०

एक सेकंदास १से० असें मांडितात.

या देशांत एक दिवसास ६० भागांत भागून, त्यांतील एक भागास घटिका ह्मणतात, आणि एक घटिकेचे ६० भाग कल्पून त्यांतील प्रत्येक भागास पळ ह्मणतात; यावरून एक दिवसांत ३६०० पळें आहेत, आणि हें काळमान याप्रमाणें आहे ;—

या देशांतील काळमान.

६० पळें ह्मणजे	१ घटिका	१ घ०
२ घटिका	१ मुहूर्त	१ मु०
$3\frac{3}{4}$ मुहूर्त	१ प्रहर	१ प्र०
८ प्रहर	१ अहोरात्र दिवस	१ दि०
१५ दिवस	१ पक्ष	१ प०
२ पक्ष	१ मास	१ मा०
२ मास	१ ऋतु	१ ऋ०
३ ऋतु	१ अयन	१ अ०
२ अयनें	१ वर्ष	१ व०

२१४. अशे तऱ्हेनें सेकंदाचें माप सांपडल्यावर, घड्याळाचा आंदोलक असा करितां येईल; कीं तो चालू केला असतां लंडन् शहराचे अक्षांशांत बरोबर एक सेकंदांत एक झोंका खाईल. नवें माप करायाचें जर असलें, तर अशा आंदोलकाचा लांबीस एक यार्ड ह्मटल्यानें, आणि लांबीचे सर्व दुसऱ्ये मोजण्याविषयीं यास मूळ माप असें ठरविल्यानें सोईस पडेल. परंतु हालीं एक यार्डाचें माप स्थापिलें गेलें आहे; आणि त्याचा योगानें वर सांगितलेल्या आंदोलकाची लांबी सांगतां

B4

A3

येईल. या आंदोलकाची लांबी काढण्याविषयींचे चौकशीपासून असें कळलें आहे, कीं लंडनांत आंदोलकाची लांबी ३९·१३९३ इंच आहे, अथवा सुमारानें एक यार्ड, तीन इंच, आणि एक इंचाचे $\frac{५}{३६}$ श आहे. यार्डाचे विभाग या पुढीलप्रमाणें आहेत.

इंग्रेजी लांबीचीं मानें.

सर्वांहून लहान माप जव आहे.

३ जव	ह्मणजे	१ इंच	१ इं०
१२ इंच		१ फूट	१ फू०
३ फुटी		१ यार्ड	१ या०
५$\frac{१}{२}$ यार्ड		१ पोल	१ पो०
४० पोल अथवा २२० यार्ड		१ फर्लांग	१ फ०
८ फर्लांग अथवा १७६० यार्ड		१ मैल	१ मै०
आणि ६ फुटी		१ फादम	१ फा०
६९$\frac{१}{३}$ मै		१ अंश	१ अं अथवा १°

भूगोलविद्येंतील मैल एक अंशाचा $\frac{१}{६०}$ वा भाग आहे, आणि तसे तीन मैल ह्मणजे नावाड्याचा एक लीग्.

या देशांतील भूमी लांब मोजणीचें कोष्टक.

८ यव	ह्मणजे	१ अंगुळ	१ अं०
२४ अंगुळें		१ हात	१ हा०
४ हात		१ दंड	१ दं०
२००० दंड		१ क्रोश.कोस	१ को०
२ कोस		१ गव्युति	१ ग०
२ गव्यूति		१ योजन	१ यो०

या देशांतील वस्त्रें व काष्ट मोजणीचें कोष्टक.

२ अंगुळें	ह्मणजे	१ तसु	१ त०
१२ तसु		१ हात	१ हा०
२ हात		१ गज	१ ग०

कापड मोजायाचीं इंग्रेजी मानें.

$2\frac{1}{4}$ इंच	ह्मणजे	१ नेल	१ ने०
४ नेल		१ पावयार्ड . . .	१ पा०
३ पाव		१ फ्लेमिशएल्ल . .	१ फ्ले० ए०
५ पाव		१ इंग्लिश एल . .	१ इं० ए०
६ पाव		१ फ्रेंचएल . . .	१ फ्रें० ए०

२१५. क्षेत्राचीं इंग्रेजी मानें.

सगळीं क्षेत्रें चौरस इंच, चौरस फूटी, इत्यादीनीं मापिलीं जातात; चौरस इंच ह्मणजे जा चौरसाची प्रत्येक बाजू १ इंच लांबीची आहे तें, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. हीं पुढील मानें लांबीचे मानांपासून निघतात, असें दिसण्यांत येईल.

१४४ चौरस इंच	ह्मणजे	१ चौरस फूट . .	१ चौ० फु०
९ चौरस फुटी . . .		१ चौरस यार्ड . .	१ चौ० या०
$30\frac{1}{4}$ चौरस यार्ड . . .		१ चौरस पोल . .	१ चौ० पो०
४० चौरस पोल . . .		१ रूड	१ रू०
४ रूड		१ एकर	१ ए०

एक एकरांत ४८४० चौरस यार्ड आहेत, जा चौरसाची बाजू २२ यार्ड आहे त्याचे दहा पट एक एकर आहे. जी सांकळी सर्वेयर लोक कामांत आणितात ती २२ यार्डांचे लांबीची असती, तिला १०० कड्या असतात, आणि ती प्रत्येक कडी यार्डाचे ·२२ किंवा ७·९२ इंच लांबीची असती. एक एकर ह्मणजे १० चौरस सांकळ्यांचे बरोबर आहे. एथें लक्षांत आणिलें पाहिजे, कीं जा चौरसाची बाजू $69\frac{4}{7}$ यार्ड आहे, तो १ एकराचे जवळ जवळ आहे, परंतु तो एक चौरस फुटीचा $\frac{1}{7}$ इतक्यानें एक एकराहून अधिक आहे.

या देशांतील चौरस मोजणीचें कोष्टक.

८	यव	ह्मणजे	१	अंगुळ	१ अं०
४	अंगुळें		१	मुष्टि	१ मु०
३	मुष्टि		१	वीत	१ वी०
२	विती		१	हात	१ हा०
५$\frac{५}{६}$	हात		१	काठी	१ का०
२०	काठ्या		१	पांड	१ पां०
२०	पांड		१	बिघा	१ बि०
१२०	बिघे		१	चाहूर	१ चा०

पैमाषीचे चालीप्रमाणें.

१६	आणे	ह्मणजे	१	गुंठा	१ गुं०
४०	गुंठे		१	एकर	१ ए०

यांत एक आणा ह्मणजे ७$\frac{१}{२}$ चौरस यार्डांजवळ आहे.

या देशांत हाताचा लांबीचा सर्वत्र सारखेपणा नाहीं, यामुळें काठीचा मापांतहि फेरफार आहे. त्यांतून मुंबईचा आसपास जी काठी चालू आहे, तिची लांबी ९·४ फुटी आहे. आणि यावरून एका बिघ्यांत ३९२६$\frac{२}{३}$ चौरस यार्ड आहेत, आणि एक एकरांत ४८४० चौरस यार्ड आहेत, यावरून त्यांचें प्रमाण जवळ जवळ ८१ स १०० असें आहे.

२१६. भरींवाचीं किंवा *पोकळीचीं मानें.

घन ह्मणजे फांशाचे रूपाचें भरींव आहे. घन इंच ह्मणजे, असा घन आहे, कीं ज्याची प्रत्येक बाजू एक एक इंच आहे, आणि याप्रमाणें पुढेंहि,

*पोकळी या शब्दाचा अर्थ तोच शब्द कामांत घेतल्यानें समजेल. जेव्हां एक मापांत दुसऱ्या मापापेक्षां अधिक रहातें, तें माप दुसऱ्या मापापेक्षां मोठ्या पोकळीचें आहे असें ह्मणतात.

१७२८ घनइंच	ह्मणजे	१ घनफूट	. . .	१ घ० फू०
२७ घनफुटी	. . . . .	१ घनयार्ड	. . .	१ घ० या०

हें माप फार करून व्यवहारकामांत येत नाहीं, तथापि तें बहुतकरून मोठ्ये गणिताचे प्रश्नांत मात्र येतें. पूर्वी वेगवेगळाल्या जिनसांकरितां इंग्लंडांत वेगवेगळीं मापें कामांत घेत होते, परंतु हालीं तीं सोडून एकच कामांत घेतात. त्यास इंपीरियल किंवा बादशाही मान ह्मणतात, आणि तें पुढीलप्रमाणें आहे.

प्रवाही पदार्थांचीं आणि सर्व कोरड्ये जिनसांचीं इंग्रेजी मानें.

४ जिल	ह्मणजे	१ पैंट	. . .	१ पैं०
२ पैंट	- - - -	१ कार्ट	. . .	१ का०
४ कार्ट	- - -	१ ग्यालन	. .	१ ग्या०
२ ग्यालन	- - -	१ पेक*	. . .	१ पे०
४ पेक	- - -	१ बुशल	. .	१ बु०
८ बुशल	- - -	१ कार्टर	. .	१ का०
९ कार्टर	- - -	१ लोड	. . .	१ लो०

या मानामध्यें ग्यालन सुमारानें २७७·२७४ घनइंच आहे; ह्मणजे, $२७७\frac{१}{४}$ घनइंच यांचे फार जवळ जवळ आहे.

या देशांत व्यापारांतील साखर, तेल, तूप, इत्यादि तोलायाचे वजनाचे कोष्टक.

पुणें चालीचा.

८ गुंजा	ह्मणजे	१ मासा	. . . .	१ मा०
१२ मासे	. . . .	१ टांक	. . . .	१ टां०
७२ टांक	. . . .	१ पक्का शेर	. . .	१ प० शे०
४० शेर	. . . .	१ मण	. . . .	१ म०
$२\frac{१}{२}$ मण	. . . .	१ पला	. . . .	१ प०
८ पल्ले किंवा २० मण	. . . . .	१ खंडी	. . . .	१ खं०

* पेक आणि त्याचे पुढील सर्व मापें केवळ कोरडा जिन्नस मापायाचे कामांत घेतात;

मुंबई चालीचा.

८ गुंजा	ह्मणजे	१ मासा	....	१ मा०
१२ मासे	.....	१ तोळा	....	१ तो०
२८ तोळे	.....	१ शेर	....	१ शे०
४० शेर	......	१ मण	....	१ म०
२० मण	.....	१ खंडी	....	१ खं०

दक्षिण महाराष्ट्र देशीं तेल, तूप, भाजी, इत्यादि तोलाचे कोष्टक.

२४ तोळे	ह्मणजे	१ कच्चा शेर	...	१ क० शे०
५ कच्चे शेर	.....	१ पांसरी	....	१ पां०
८ पांसऱ्या	.....	१ कच्चा मण	...	१ क० म०
२० मण	....	१ खंडी	.....	१ खं०

धान्यादि मोजायाचे कोष्टक.

पुणें चालीचा.

४ चिपटीं	ह्मणजे	१ शेर	......	१ शे०
२ शेर	....	१ अधोली	....	१ अ०
२ अधोल्या	......	१ पायली	....	१ पा०
१२ पायल्या	.....	१ मण	......	१ म०
$2\frac{1}{2}$ मण	....	१ पला	......	१ प०
८ पले किंवा } 20 मण	....	१ खंडी	......	१ खं०

मुंबई चालीचा.

२ टिपऱ्या	ह्मणजे	१ शेर	....	१ शे०
४ शेर	....	१ पायली	...	१ पा०
१६ पायल्या	....	१ फरा	....	१ फ०
८ फरे	....	१ खंडी	....	१ खं०
२५ फरे	....	१ मुडा	....	१ मु०

कोंकणांतील मीठ मोजावयाच्या मापाचें कोष्टक.

१० $\frac{१}{२}$ अधोल्या	ह्मणजे	१ फरा	....	१ फ०
१०० फरे	....	१ आणा	...	१ आ०
१६ आणे	....	१ रास	....	१ रा०

२१७. सर्वांपेक्षां जें लहान वजन कामांत घेतात, त्यास ग्रेन ह्मणतात, आणि तें याप्रमाणें ठरविलें जातें. जर एक घनइंच पोकळीचें पात्र *पाण्यानें भरलें, तर त्याचें वजन पूर्वीपेक्षां २५२·४५८ इतके ग्रेन वाढेल. असे ठरविलेले ७००० ग्रेन **अवार्ड्यूपाईस** चे एक पौंडांत असतात, आणि ५७६० ग्रेन **ट्रायचे** पौंडांत असतात. सोनें, रुपें, रत्नें आणि औषधें, इत्यादि खेरीज करून बाकी सर्व पदार्थांचें वजन करण्यासाठीं, अवार्ड्यूपाइसचा पौंड नेहमी कामांत घेतात. तो पुढीलप्रमाणें विभागिला आहे.

अवार्ड्यूपाईसचें इंग्रेजी वजन.

२७ $\frac{११}{३२}$ ग्रेन	ह्मणजे	१ ड्राम	...	१ ड्रा०
१६ ड्राम	.....	१ औंस	...	१ औं०
१६ औंस	....	१ पौंड	...	१ पौं०
२८ पौंड	......	१ कार्टर	...	१ का०
४ कार्टर	.....	१ हन्ड्रेडवेट	..	१ हं०
२० हन्ड्रेडवेट	....	१ टन्	...	१ ट०

अवार्ड्युपाइसाचे १ पौंडांत ७००० ग्रेन आहेत. शुद्ध पाण्याचे एक घन फुटीचें वजन ६२·३२१०६०६ अवार्ड्यूपाइसाचे पौंड, अथवा ९९७·१३६९६९१ औंस आहे.

---

*पाणी उकळून त्यापासून जी वाफ उत्पन्न होती, ती धरून थंड केल्यानें जें पाणी उत्पन्न होतें, तें पाणी वरच्या अनुभव पाहण्यास घ्यावें, कारण अशानें तें निर्मळ होतें. त्याचे उष्णतेची स्थिती फारनहैटचे थर्मामिटरचे ६२ अंशाबरोबर असावी.

या देशांतील सोनें, रुपें, इत्यादि तोलायाचे वजनाचें कोष्टक.

पुणें चालीचा.				मुंबई चालीचा.			
८ गुंजा	ह्मणजे	१ मासा		$3\frac{1}{3}$ वाल	ह्मणजे	१ मासा
१२ मासे	. . . . .	१ तोळा		४० वाल किंवा १२ मासे	. . .	१ तोळा
२४ तोळे	. . . . .	१ शेर		२४ तोळे	. . . . . .	१ शेर

मोतीं तोलाचें कोष्टक.

पुणें चालीचा.			मुंबई चालीचा.		
१६ तांदूळ	ह्मणजे	१ रती	$13\frac{3}{4}$ टके	ह्मणजे	१ रती
२४ रती	. . . . . .	१ टांक	२४ रती	. . . . .	१ टांक

सोनें, रुपें, रत्नें, आणि औषधें हीं वजन करण्यासाठीं त्रायचा पौंड कामांत घेतात, त्यांत ५७६० ग्रेन आहेत, परंतु या दोन पक्षांत त्याचे भाग निरनिराळे आहेत. तीं मानें या पुढीलप्रमाणें आहेत.

इंग्रेजी त्रायचें वजन.

२४ ग्रेन	ह्मणजे	१ पेनीवेट	. . . .	१ पे०
२० पेनिवेट	. . .	१ औंस	. . . . .	१ औं०
१२ औंस	. . . .	१ पौंड	. . . . .	१ पौं०

त्रायचे पौंडांत ५७६० ग्रेन आहेत. शुद्धपाण्याचे १ घन फुटीचें वजन त्रायचे ७५·७३७४ पौंड, किंवा ९०८·८४८८ औंस आहेत.

२० ग्रेन म्हणजे	१ स्क्रूपल्	. .	℈
३ स्क्रूपल्	१ ड्राम	. . .	ʒ
८ ड्राम	१ औंस	. . .	℥
१२ औंस	१ पौंड	. . .	lb

पैक्याचे कोष्टक.

दक्षिणदेशांतील पैक्याचा कोष्टक.

४ कवड्या म्हणजे	१ गंडा
२ गंडे	१ टोली
२ टोल्या	१ दमडी
४ दमड्या	१ पैसा
४ पैसे	१ आणा
४ आणे	१ पावला
४ पावले	१ रुपया
१५ रुपये	१ मोहोर

सरकारी रीतिचा कोष्टक.

१०० रेस म्हणजे	१ पावला	१२ पै म्हणजे	१ आणा
४ पावले	१ रुपया	१६ आणे	१ रुपया

२१८. तांबें, रुपें आणि सोनें यांचें इंग्रेजी चालतें नाणें या पुढीलप्रमाणें आहे; म्हणजे १ पेनी, हें नाणें तांब्याचें आहे, आणि त्याचें वजन $१०\frac{२}{३}$ ड्राम आहेत; एक शिलिंग, याचें वजन ३ पेनिवेट आणि १५ ग्रेन आहे, त्यांत ४० भागांतून ३ भाग हीण आणि बाकी शुद्ध रुपें आहे; एक सावरेन, याचें वजन ५ पेनिवेट आणि $३\frac{१}{४}$ ग्रेन आहे, यांत १२ भागांतून १ भाग तांब्याचा आहे, आणि बाकी शुद्ध सोनें आहे.

इंग्रेजी पैक्याचीं नाणीं.

सर्वांहून लहान नाणें फार्दिंग आहे, त्यास $\frac{1}{4}$ असें मांडितात, कांकीं तो पेनीचा चवथा भाग आहे.

२ फार्दिंग	ह्मणजे	१ अर्धपेनी	...	$\frac{1}{2}$ पे०
२ अर्धपेनी	....	१ पेनी	.....	१ पे०
१२ पेनी	......	१ शिलिंग	...	१ शि०
२० शिलिंग	....	१ पौंड*० सावरेन		१ पौंड०

२१९. अनेक तऱ्हेचे परिमाणांनीं एकादें परिमाण झालें असतें, आणि तें निरनिराळ्ये एकंमांनीं दाखविलें असतें; जसें, १रु० १४आ० ६पै, अथवा १पौं० १४शि० ६पे० अथवा, २ह० १का० ३पौं०; यांस **विविधपरिमाणें** ह्मणतात. स्पष्ट आहे, कीं वरचे कोष्टकांपासून कोणत्येहि पदार्थाचें विविध परिमाण, अनेक निरनिराळ्ये तऱ्हांनीं मापितां येईल. उदाहरण, जी रकम पांच रुपये आणि चार आण्यांची आहे, ती ८४ आण्यांची, अथवा १००८पै ची, असेंहि ह्मणतात. कोणतेंहि परिमाण एक रूपांतून दुसऱ्ये रूपांत सहज नेतां येतें; आणि जा रितीस **भांजणी** ह्मणतात, ती सर्व जातींचे परिमाणांस कशी लावावी तें या पुढील उदाहरणांपासून समजेल.

पहिलें. १८ रु० १२ आ० ६ पै यांत किती पै आहेत ?

एक रुपयांत १६ आणे आहेत, ह्मणून १८ रुपयांत १८×१६, अथवा २८८ आणे आहेत, यामुळें १८रुपये, १२आणे, हे २८८+१२, अथवा ३०० आणे आहेत. पुनः एक आण्यांत १२ पै आहेत, ह्मणून ३०० आण्यांत ३००×१२, अथवा ३६०० पै आहेत. यामुळें १८रु०, १२ आ०, ६ पै यांत ३६००+६, अथवा ३६०६ पै आहेत. ही कृति या पुढीलप्रमाणें होईल.

*इंग्लिश पौंडाला विशेषेंकरून पौंड स्टर्लिंग ह्मणतात, आणि तो £ या खुणेनें लिहितात.

१६

२८८+१२=३००

१२

३६००+६=३६०६ पै.

दुसरें. ३६०६ पै यांत रुपये, आणे, आणि पै किती आहेत ?

३६०६ यांस १२ नीं भागिलें असतां भागाकार ३०० येतो, आणि बाकी ६ राहतात, ह्मणून ३६०६ पैंत ३०० आणे आणि ६ पै आहेत.

३०० यांस १६ नीं भागिलें असतां भागाकार १८ येऊन बाकी १२ राहातात, यावरून ३०० आण्यांत १८ रुपये आणि १२ आणे आहेत.

यामुळें ३६०६ पैंत ३०० आणे आणि ६ पै, अथवा १८ रुपये १२ आणे आणि ६ पै आहेत. आणि ही कृति या पुढीलप्रमाणें आहे.

पै

१२)३६०६

१६)३००..६

१८रु०१२आ०६पै०

तिसरें. १८ पौं० १२ शि० *$६\frac{3}{4}$ पे० यांत किती फार्दिंग आहेत ?

जापेक्षां एक पौंडांत २० शिलिंग आहेत, ह्मणून १८ पौं०, यांत १८×२०, अथवा ३६० शिलिंग आहेत; यामुळें १८पौं० १२ शि० हे ३६०+१२, अथवा ३७२ शिलिंग आहेत. जापेक्षां एक शिलिंगांत १२ पेनी आहेत, ह्मणून ३७२ शिलिंगांत ३७२×१२, अथवा ४४६४ पेनी आहेत; आणि यामुळें १८पौं० १२ शि० ६ पे० यांत ४४६४+६, अथवा ४४७० पेनी आहेत.

एक पेनीमध्यें ४ फार्दिंग आहेत, ह्मणून ४४७० पेनीमध्यें ४४७०×४, अथवा १७८८० फार्दिंग आहेत; आणि, यामुळें १८ पौं० १२शि० $६\frac{3}{4}$ पे०

---

*फार्दिंग निराळे मांडीत नाहींत, परंतु पेनीचे भाग रूपानें मांडितात. जसें तीन फार्दिंग हे एक पेनीचे $\frac{3}{4}$ आहेत, आणि त्यांस $\frac{3}{4}$ अथवा ३/४ याप्रमाणें मांडितात. $\frac{1}{2}$ अथवा $\frac{1}{2}$ याप्रमाणें एक अर्ध पेनी लिहितात; परंतु दुसरी तऱ्हा फार करून घेतात.

यांत १७८८०+३, अथवा १७८८३ फार्दिंग आहेत. ही सर्व कृति या पुढीलप्रमाणें मांडितात.

पौं० शि० पे०
१८ . . १२ . . ६$\frac{3}{4}$
२०
३६०+१२=३७२
१२
४४६४+६=४४७०
४
१७८८०+३=१७८८३ फार्दिंग.

चवथें. १७८८३ या फार्दिंगांत किती पौंड, शिलिंग, पेनी आणि फार्दिंग आहेत ?

जापेक्षां १७८८३ यांस ४ नीं भागिलें असतां, भागाकार ४४७० येतो, आणि बाकी तीन रहातात, ह्मणून १७८८३ फार्दिंगांत (२१८) प्रमाणें ४४७० पेनी आणि ३ फार्दिंग आहेत.

जापेक्षां ४४७० यांस १२ नीं भागिलें असतां, भागाकार ३७२ येतो, आणि बाकी ६ रहातात, ह्मणून ४४७० पेनीमध्यें ३७२ शिलिंग, आणि ६ पेनी आहेत.

जापेक्षां ३७२ यांस २० नीं भागिलें, तर भागाकार १८ येतो, आणि बाकी १२ रहातात, ह्मणून ३७२ शिलिंगांत १८ पौंड, १२ शिलिंग आहेत.

यामुळें १७८८३ फार्दिंगांत ४४७०$\frac{3}{4}$ पेनी, अथवा ३७२ शि० ६$\frac{3}{4}$ पे०, अथवा १८ पौं० १२ शि० ६$\frac{3}{4}$ पे० आहेत.

ही कृति या पुढीलप्रमाणें होईल;

फार्दिंग.
४)१७८८३
१२)४४७० . . ३
२०)३७२ . . . ६
१८ पौं० १२ शि० ६$\frac{3}{4}$ पे०

अ जवळ १००रुपये, ४आणे, ११$\frac{1}{2}$पै आणि ब जवळ ६४३९२ पै आहेत. जर अ ला १४९२ पै, आणि ब ला १रु० २आ०, ३$\frac{1}{2}$ पै मिळाल्या, तर कोणाजवळ अधिक पैका होईल, आणि तो किती होईल ?

उत्तर. अहून २२८ रु० ७ आ० ब जवळ अधिक होतील.

पुढील कोष्टकांत जीं समोरासमोर परिमाणें आहेत तीं एक सारिखींच आहेत. ह्मणून प्रत्येक आडव्ये ओळीपासून दोन उदाहरणें निघतील.

१ रु० १ पा० २ आ०	५६३२ कवड्या.
१५ पौं० १८ शि० ९$\frac{1}{2}$ पे०	१५३०२ फार्दिंग.
६२ रु० २ पा०	१००० आ०, अथवा १२००० पै.
११५ पौं० १ औं० ८ पे०	६६३०७२ ग्रेन.
२० शे० १५ तो०	४७५२० गुंजा.
३ पौं० १४ औं० ९ द्रा०	१००१ द्राम.
५९ खं० १० म० ३० शे०	४७६३० शेर.
३ मै० १४९ या० २ फु० ९ इं०	१९५४७७ इंच.
५ को० ५०० दं०	१०५०० दंड.
१९ बु० २ पे० १ ग्या० २ कार्ट	१२६० पैंट.
४ फ० ८ पा० ३ शे १ टि०	५८३ टिपऱ्या कैली मुंबई चालीचा.
१६° २३′ ४७″	५९०२७ सेकंद.
१० म० ९ दि० २ प्र० ५ घ०	१८५६० घटिका.

२२०. सांगितल्या संख्या अपूर्णांक असल्या, तरी वर प्रमाणेंच करितां येईल. एक रुपयाचा $\frac{1}{3}$ यांत किती आणे व पै आहेत ? आतां रुपयाचा $\frac{1}{3}$ हा १६ आण्यांचा $\frac{1}{3}$ आहे; १६ चा $\frac{1}{3}$ हा $\frac{16\times1}{3}$ आहे, अथवा $\frac{16}{3}$, अथवा (१०५) ५$\frac{1}{3}$ आणे आहेत. पुनः एक आण्याचा $\frac{1}{3}$ हा १२ पैंचा $\frac{1}{3}$, अथवा ४ पै आहेत. यावरून एक रुपयाचा $\frac{1}{3}$ = ५आणे आणि ४ पै आहेत. आणखीं, एक दिवसाचे ·२३ हे ·२३×२४,

किंवा ५·५२ अवर आहेत; आणि एक अवराचे ·५२ हे ·५२×६०, अथवा ३१·२ मिनिटें आहेत; आणि एक मिनिटाचे ·२ हे ·२×६०, अथवा १२ सेकंद आहेत; यावरून एक दिवसाचे ·२३ हे ५ अ० ३१ मि० १२ से० आहेत.

पुनः मनांत आण कीं ६आणे आणि ८पै मिळून, एक रुपयाचा कोणता भाग असें विचारिलें आहे. जापेक्षां ६आ० ८पै० हे ८० पै आहेत, आणि एक रुपयांत १६×१२ किंवा, १९२ पै आहेत, तर रुपयाचा १९२ भागांतून ८० भाग घेतल्यानें ६ आणे आणि ८ पै हे रुपयाचा कोणता भाग आहे हें समजेल. तर तो (१०७)प्रमाणें $\frac{८०}{१९२}$ रुपये आहे; परंतु (१०८) प्रमाणें $\frac{८०}{१९२}=\frac{५}{१२}$; यामुळें ६ आणे आणि ८ पै $=\frac{५}{१२}$ रु० आहेत.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

अ० मि०
एक दिवसाचे $\frac{२}{५}$ हे - - - ९ - - ३६, अथवा २४ घटिका आहेत.

अ० मि० से०*
एक दिवसाचे ·१२८४१ हे - - - ३ - - ४ - - ५४·६२४

पौं० औं० द्रा०
एक हंद्रडवेटाचे ·२५७ हे - - २८ - १२ - ८·७०४ आहेत.

शि० पें० फा०
पौंडाचे ·१४९३६ हे - - २ - ११ - ३·३८५६ आहेत.

रुपयाचे ·१४९३६ हे - - २ आ० - - ४ पै० ·६७७१२ आहेत.

२२१,२२२. शिलिंग, पेनी, आणि फार्दिंग, यांस पौंडाचे दशांशाचें रूप देण्याची रीति, पुढें या ग्रंथपुरवणीमध्यें दाखविली आहे.

---

*जेव्हां पूर्णांकाचे उजव्येकडे दशांश येतात, तेव्हां जा जातीचे पूर्णांकाचे एकं आहेत, त्याच जातीचे दशांश आहेत. जसें, ५·५ से० हे पांच सेकंद आणि एक सेकंदाचे पांच दशांश आहेत. जसें, ०·५ सेकंद हे एक सेकंदाचे पांच दशांश आहेत; आणि ०·३ अवर हे एक अवराचे तीन दशांश आहेत.

पुरवणींत जा रिती सांगीतल्या त्यांशीं शिकणारानें पक्के माहीत असावें हें योग्य आहे.

२२३. एक्ये जातीचे दोन विविध परिमाणांची बेरीज करण्याची रिती, या पुढील उदाहरणापासून स्पष्ट कळेल. मनांत आण कीं, १९२ रु० १४ आ० $२\frac{१}{२}$ पै हे ६४ रु० १३ आ० $११\frac{३}{४}$ पै यांशीं मिळवायाचे आहेत. या दोहोंतील निरनिराळे भाग मिळविल्याने जें होतें, ती बेरीज आहे. आतां.

पै पै पै   रु०   आ०   पै

$\frac{३}{४}+\frac{१}{२}=\frac{५}{४}$ = ० -- ० -- $१\frac{१}{४}$ (२१९) प्रमाणें.

पै पै पै

११+२=१३ = ० -- १ -- १

आ आ आ

१३+१४=२७ = १ -- ११ -- ०

रु६४+रु१९२ = २५६ -- ० -- ०

या सर्वांची बेरीज = रु० २५७ -- १२ -- $२\frac{१}{४}$ आहे.

ही कृति एकदांच करून, पुढीलप्रमाणें मांडितात;

रु० १९२ .. १४ .. $२\frac{१}{२}$
रु० ६४ .. १३ .. $११\frac{३}{४}$
रु० २५७ .. १२ .. $२\frac{१}{४}$

पहिल्यानें पैंचे अपूर्णांकांची बेरीज घेऊन, त्यांतील पूर्ण पै हातचा घेऊन अपूर्णांक खालीं मांड; नंतर पैंचे ओळींत हातचा आलेल्या पै मिळीव; आणि त्या बेरिजेंत किती आणे व पै आहेत ते पाहून त्यांतील, पै मात्र मांडून, आणे हातचे घेऊन आण्यांचा ओळींत मिळीव आणि या प्रमाणें पुढें कर. दुसरे कांहीं जातींचे परिमाणांची बेरीज घेण्याविषयीं हीच रिती लागू होईल. आणि कोष्टक पाठ केल्यावर, कृति करायास सोपें पडेल.

२२४. (४०) कलमांतील सांगीतल्ये रितीप्रमाणें वजाबाकी करितां येईल, ह्मणजे, जर दोन परिमाणांस एक सारिखेंच परिमाण मिळविलें, तर त्या दोन परिमाणांचे अंतरांत कांहीं फेर पडत नाहीं. मनांत

आण, कीं २४रु० ५आ० ७पै यांतून १९रु० १३आ० १०पै० हे वजा करायाचे आहेत. हीं परिमाणें या पुढीलप्रमाणें मांड;

रु०	२४	५	७
रु०	१९	१३	१०

जापेक्षां ७पै तून १०पै वजा होत नाहींत, ह्मणून या दोन परिमाणांस १ आणा मिळींव, ह्मणजे वरचे परिमाणास १२पै मिळीव, आणि खालचे परिमाणास १आणा मिळीव. यावरून वरचे ओळींत १९पै आणि खालचींत १४आणे होतील, त्यांची वजाबाकी करून बाकी ९पै खालीं मांड; जापेक्षां खालचे ओळीचे आणे १ नें वाढविले, ह्मणून खालचे ओळींत १४ आणे आणि वरचे ओळींत ५ आणे आहेत. वरचे ओळीला १६ आणे आणि खालचे ओळीला १ रुपया मिळवून, खालचे ओळीचे आणे वरचा ओळीचा आण्यांतून वजाकरून बाकी ७ आणे राहातात. आतां खालचे ओळींत २०रु० आणि वरचे ओळींत २४रु० आहेत, आणि त्यांची वजाबाकी ४रु० आहे; यामुळें या दोन रकमांची वजाबाकी ४रु० ७आ० ९पै आहे. वेगवेगळ्या रकमांशीं जें जें वेगळालें मिळविलें आहे, त्या रूपानें मांडलें असतां, कृति याप्रमाणें होईल.

	रु०	२४	२१	१९
	रु०	२०	१४	१०
बाकी	रु०	४	७	९

२२५. कोष्टकांतून दुसऱ्ये कोणत्येहि जातीचे परिमाणांस ही रीति लावितां येईल. याजकरितां दुसरें एक उदाहरण देतों;

७ह०	२कार०	२१पौं०	१४औं०	यांतून
२ह०	३कार०	२७पौं०	१२औं०	हे वजाकर

मागील कलमाप्रमाणें फेरफार केल्यानंतर उदाहरण याप्रमाणें होतें;

७ह०	६कार०	४९पौं०	१४औं०	यांतून
२ह०	४कार०	२७पौं०	१२औं०	हे वजाकर
४ह०	२कार०	२२पौं०	२औं०	बाकी.

करितां येईल. एथें २१पौंडांत २७ पौंड जात नाहींत, ह्मणून व-जाबाकी करीत नाहीं, परंतु २१पौंडांत १क्वा० अथवा २८ पौंड मिळवितों, नंतर त्या बेरिजेंतून २७पौं० वजा करितों. पहिल्यानें १क्वा० अथवा २८पौं० यांतून २७पौं० वजा करून बाकी, २१पौंडांत मिळविली असतां, कृति तोंकडी होऊन उत्तर सारिखेंच निघेल.

२२६. अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

एका व्यापारी मनुष्याचीं पांच दुकानें होतीं त्यांतून तीन दुकानांत त्यास नफा झाला तो या पुढीलप्रमाणें १५४०रु० १२आ० ८ पै, आणि ३०५ रु० ४ आ० ३ पै, आणि ७५०रु० २आ० ६पै; आणि दोन दुकानांत तोटा झाला तो ९१०रु० ८आ० ६पै, आणि ६८५रु० १०आ० ११पै. तेव्हां त्या सावकारास नफा काय राहिला?

उत्तर. १००० रुपयें नफा झाला.

एका मनुष्यास या पुढील रकमा घेणें आहेत, १९३पौं० १४शि० ११$\frac{१}{४}$पे०, २०पौं० ०शि० ६$\frac{३}{४}$पे०, ६४७२पौं० ०शि० ०पे०, आणि ४९पौं० १४शि० ४$\frac{१}{२}$पे०, आणि त्यास पुढील कर्ज देणें आहे; २००पौं० १९शि० ६$\frac{१}{४}$पे०, ३०५पौं० १६शि० ११पे०, २२पौं०, आणि १९पौं० ६शि ०$\frac{१}{२}$पे०, तर सर्व कर्ज फेडून त्याजवळ बाकी किती राहील?

उत्तर. ६१९०पौं० ७शि० ४$\frac{३}{४}$पे०

अ, ब, क, ड, अशीं चार शहरें अनुक्रमानें एकापुढें एक आहेत. आणि जर एक मनुष्य ५अ० २०मि० ३३से० इतक्या काळांत अ पासून ब जवळ जातो; ६अ० ४९मि० २से० इतक्ये वेळांत ब पासून क जवळ जातो; आणि १९अ० ०मि० १७से० इतक्या काळांत अ पासून ड जवळ जातो; तर ब पासून ड पर्यंत, आणि क पासून डपर्यंत जाण्यास त्या मनुष्याला किती काळ लागेल?

उत्तर, १३अ० ३९मि० ४४से० आणि ६अ० ५०मि० ४२से०

२२७. गुणाकाराची कृति करायासाठीं, लक्षांत ठेवावें कीं, जसें (५२) कलमांत सांगितलें, कीं जर कांहीं परिमाण अनेक भागांत विभागून, तो प्रत्येक भाग भलत्ये कांहीं संख्येनें गुणिला, आणि त्यांचे वेगळाल्ये गुणाकारांची बेरीज घेतली, तर त्यापासून जें उत्तर निघतें, तें आणि तीं सर्व परिमाणें त्याच संख्येनें गुणून जें उत्तर निघतें, हीं दोनीं उत्तरें सारखींच होतील.

७रु० १३आ० ६पै यांस १३ नीं गुणायाचें आहे. यांतील पहिलें परिमाण ७ रुपये, १३ आणे, आणि ६पै, या वेगळाल्ये भागांनीं झालें आहे. आणि

		रु०	आ०	पै.	
६पै० × १३= ७८पै०	अथवा	०	६	६	आहेत.
१३आ०× १३=१६९आ०	अथवा	१०	९	०.	
७रु० × १३= ९१रु०	अथवा	९१	०	०	
या सर्वांची बेरीज		रु० १०१	१५	६	आहेत.

हीं बेरीज यांचे बरोबर आहे, रु० ७ -- १३ -- ६×१३.

ही कृति बहुतकरून पुढीलप्रमाणें मांडितात;

	रु०	आ०	पै०
	७	१३	६
			१३
रु०	१०१	१५	६

२२८. (७४) कलमांत जें मूळ कारण सांगितलें आहे, त्यावरून **भागाकार** करितात, ह्मणजे, जर कांहीं परिमाण अनेक भागांत विभागिलें, आणि तो प्रत्येक भाग, भलत्ये कांहीं संख्येने विभागिला, तर त्या वेगळाल्ये भागाकारांची बेरीज, तें सर्व परिमाण त्याच संख्येने भागून जो भागाकार येईल, त्याचे बरोबर आहे. मनांत आण, कीं ९९रु० १४आ० ९पै यांस १३नीं भागायाचें आहे. जापेक्षां ९९ भागिले १३ नीं, तर भागाकार ७ येऊन बाकी ८ राहतात; मुळचें सर्व परिमाण, १३रु०×७, अथवा ९१रु० आणि ८ रु० १४आ० ९पै यांणीं झालें आहे. १३ भाज्य असून पहिल्ये रकमेचा भागाकार ७रु० आहे; दुसरीचा

आहेत, ह्मणून १२८ १४आ [illegible]
आणि १४२ यांस १३ नीं भागून भागाकार १० येऊन, बाकी १२ राहतात; १४२ आणे आणि ९ पै हे १३×१०, अथवा १३० आणे, आणि १२ आणे, ९ पै यांणी झाले आहेत, यांतील पहिल्याचा भागाकार १० आणे आहे, आणि दुसऱ्याचा भागाकार काढायाचा राहिला. आतां १२ आणे यांत १४४पै आहेत, ह्मणून १२ आणे, ९ पै मिळून १५३ पै आहेत, यांस १३ नीं भागून भागाकार ११ येऊन बाकी १० राहतात; ह्मणजे १५३ पै, ह्या १३×११, किंवा १४३ पै आणि १०पै मिळून झाल्या आहेत; आणि पहिल्याचा भागाकार ११ पै, आणि बाकी पैचे $\frac{१०}{१३}$ आहेत. यावरून सर्व परिमाणाचा १३ वा भाग ७ रु० १०आ० ११$\frac{१०}{१३}$ पै आहे. ही सर्व कृति पुढीलप्रमाणें मांडितात; आणि पुढील अभ्यासासाठीं सांगितलेल्या उदाहरणांस, तशीच तऱ्हेची कृति लावितां येईल.—

```
      रु०   आ०    पै०   रु०   आ०   पै०
  १३)९९ -- १४ -- ९  (७ -- १० -- ११ १०/१३
     ९१
     --
      ८
     १६
     --
    १२८+१४=१४२
           १३०
           ---
            १२
            १२
           --------
           १४४+९=१५३
                 १३
                ---
                  २३
                  १३
                  --
                  १०
```

यांत ९९, १४२, १५३, या प्रत्येक संख्या चालत्ये रितीप्रमाणें १३ नीं भागिल्या आहेत, परंतु भाजक केवळ पहिल्या रकमेचा डावेकडेस मात्र मांडिला आहे.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

२खं० ३म० ७शे०×३४ = ७३खं० ७म० ३८शेर.

२ह० १का० २१पौंड ७औंस×५३= १२९ह० १का० १६पौं० ३औं०

१७रू० ५आ० ७पै×८५ = १४७४रू० १०आ० ७पै

२दि० ४अ० ३मि० २७से०×१०९=२३६दि० १०अ० १६मि० ३से०

२७पौं० १०शि० ८पे० × ५६९=१५६६६पौं० ९शि० ४पे०

१८७ रू० ×$\frac{३}{७}$= ८०रू० २आ० ३$\frac{३}{७}$पै.

१६६पौं० ×$\frac{८}{३३}$= ४०पौं० ४शि० १०$\frac{६}{३३}$पे०

१८७पौं० ६शि० ७पे०×$\frac{३}{१००}$ = ५पौं० १२शि० ४$\frac{३}{४}$ $\frac{२}{२५}$पे०

४शि० ६$\frac{१}{२}$पे० ×११२१ = २५४पौं० ११शि० २$\frac{१}{२}$पे०

२२९. मनांत आण, कीं ३रू० १२आ० ८पै० यांत, २ आणे ४पै, किती वेळा जातात हें इच्छिलें आहे. तर पहिल्यानें प्रत्येकांत किती पै आहेत तें काढावें. (२१९) प्रमाणें, पहिल्या रकमेंत ७२८पै, आणि दुसरींत २८पै आहेत. आतां, ७२८ यांत २८ हे २६ वेळा जातात; यामुळें पहिलें परिमाण दुसरे परिमाणाहून २६ वेळा अधिक आहे. जा उदाहरणांत, रुपये, आणे, पै, येतात, त्यांत रुपयांचे दशांश कामांत घ्यावे हें बरें, ह्मणजे उत्तर पुरतेपणीं जवळ जवळ येईल. जसें, २ आ० - - ४ पै हे ·१४५८३रू० आहेत; आणि ३रू० १२आ० ८पै० हे ३·७९१६रू० आहेत; तर ३·७९१६ यांस ·१४५८३ यांणीं भागिल्यानें २६ $\frac{८}{१४५८३}$ हा भागाकार येतो. हा पक्ष रूढीचे फार बाहेरचा आहे, कां कीं जितका भाजक लहान असेल, तितकी अधिक चूक सांगितल्ये दशांशांत येईल.

१७शे० १२ तो० ७ मा० ३ गुं० यांत, १ शे० २ तो० ३ मा० हे किती वेळा जातील ?

उत्तर. १६·०२३४

६ह०, २कार०, यांत १कार०, १४पौंड०, १औं०, हे किती वेळा जातात? आणि १दि०, २अ०, ०मि०, ४७से०, यांत ३मि०, ४६से०, हे किती वेळा जातात ?

उत्तर. १७·३०७५८, आणि ४१४·३६७२५७.

जर २हं०, ३का०, १पौं०, यांस १५०पौं० १३शि० १०पे० पडतात तर १ पौंडास काय पडेल ?

उत्तर. ९शि० $९\frac{१३}{३०१}$ पे०

एक वाणी दर पौंडास ११ पे० दराची २ह०, १५पौं०, साकर घेतो, आणि दर पौंडास ५ पे० दराची १४ ह०, ३ पौं, साकर घेतो, आणि त्या दोन्हीं जातींची साकर मिश्र करितो. तर त्यास तोटा न होतां, ती मिश्र साकर कोणत्या दरानें त्याणें विकावी ?

उत्तर. ५ पे० $\frac{3}{4}\frac{१५३}{९०५}$.

२३०. गुणाकार करायाची एक सोईची रीत आहे, तीस वरावर्दी ह्मणतात. जर एक खंडीस २रू० १४आ० ६पै० पडतात, तर १५३ खंडीस काय पडेल असें विचारिलें आहे असें मनांत आण. ही रकम १५३ नीं गुणून, तो गुणाकार सर्वांची किंमत होईल हें स्पष्ट आहे.— परंतु दर खंडीस २रू० १४आ० ६पै या दरानें १५३ खंडी विकत घेतल्या तर पहिल्यानें प्रत्येक खंडीस २ रुपये प्रमाणें, नंतर प्रत्येक खंडीस ८ आणे प्रमाणें, नंतर प्रत्येक खंडीस ४ आणे प्रमाणें, नंतर प्रत्येक खंडीस २ आणे प्रमाणें, नंतर प्रत्येक खंडीस ६ पै प्रमाणें; १५३ खंडींचा पैक्याचा निरनिराळ्या रकमा काढून त्यांची बेरीज एकंदर पैका होईल. ही कृति या पुढीलप्रमाणें आहे.

१. खंडीस २ रु० प्रमाणें १५३ खंडींची किंमत - - - - - - - - - -	३०६रु०--०आ०--०पै.
२. जापेक्षां ८ आणे हे १ रु० याचें अर्ध आहे, ह्मणून १ खंडीला ८ आणे या दरानें, १५३ खंडींची किंमत $\frac{१५३}{२}$ आहे. - - - - - - - - - - - - - -	७६ -- ८ -- ०.
३. ४आणे हे ८ आण्यांचें अर्ध आहे, ह्मणून एक खंडीस ८ आणे प्रमाणें १५३ खंडींस जी किंमत पडली तिचे निमे किंमत ४ आणे दरानें होईल; अथवा ७६रु० ८आ० यांचें अर्ध ह्मणजे - - - - - - - - - - -	३८ -- ४ -- ०.
४. ४ आण्यांचें अर्ध २ आणे आहे, ह्मणून दर खंडीस ४आणे प्रमाणें १५३ खंडींची जी किंमत, तिचें अर्ध २ आणे दरानें होईल. - - - - -	१९ -- २ -- ०.
५. २ आण्याचा $\frac{१}{४}$ सहा पै होतात ह्मणून दरखंडीस ६ पै प्रमाणें १५३ खंडींची किंमत १९ रु०--२ आ० यांचा $\frac{१}{४}$ होईल. - - - - - - -	४ -- १२ -- ६.

या सर्व रकमांची बेरीज - - - - - - - ४४४ रु०--१०आ०--६पै.

ही बेरीज २ रु० १४ आ० ६ पै×१५३ यांचे बरोबर आहे.–

ही कृति या पुढीलप्रमाणें मांडितात.–

	दरखंडीस १ रु. प्रमाणें	१५३खंडींची किंमत	१५३रु.०आ. पै
२रु० हे २×१ रु० आहेत,	२ -- ० -- ०		३०६-- ०--०
८आ० हे १ रु० चा $\frac{१}{२}$ आहे,	० -- ८ -- ०		७६-- ८--०
४आ० हे ८आ० चा $\frac{१}{२}$ आहे,	० -- ४ -- ०		३८-- ४--०
२आ० हे ४ आ० चा $\frac{१}{२}$ आहे,	० -- २ -- ०		१९-- २--०
६पै० ह्या २ आ० चा $\frac{१}{४}$ आहे,	० -- ० -- ६		४--१२--६
बेरीज	२रु०१४आ०६पै		४४४रु. १०.६

एक पौंडास ९शि० १०$\frac{३}{४}$ पे० प्रमाणें १७३५ पौंडांस काय पडेल? ५शि० ४शि० १०पे० आणि $\frac{१}{२}$ पे० आणि $\frac{१}{४}$पे० मिळून सर्व किंमत ९शि० १०$\frac{३}{४}$ पे० होती; त्यांतून ५शि० हे १पौं० चा $\frac{१}{४}$ आहे, ४शि० हे १पौं० चा $\frac{१}{५}$ आहे, १० पे० हे ५शि० चा $\frac{१}{६}$ आहे, $\frac{१}{२}$ पे० हा १० पे० चा $\frac{१}{२०}$ आहे, आणि $\frac{१}{४}$ पे० हा $\frac{१}{२}$ पे० चा $\frac{१}{२}$ आहे. पूर्वींचे उदाहरणाप्रमाणें कृति केली असतां, याप्रमाणें होईल;

		अथवा १७३५ पौंडाची किंमत पुढील दरानें	पौं० शि० पे०
	दर पौं० १ पौं० प्रमाणें		१७३५ - - ० - - ०
५शि. हे १पौं. चा $\frac{१}{४}$ आहे,	० - - ५ - - ०		४३३ - - १५ - - ०
४शि. हे १पौं. चा $\frac{१}{५}$ आहे,	० - - ४ - - ०		३४७ - - ० - - ०
१० पे. हे ५शि. चा $\frac{१}{६}$ आहे,	० - - ० - - १०		७२ - - ५ - - १०
$\frac{१}{२}$पे. हा. १० पे. चा $\frac{१}{२०}$ आहे,	० - - ० - - ०$\frac{१}{२}$		३ - - १२ - - ३$\frac{१}{२}$
$\frac{१}{४}$ पे. हा $\frac{१}{२}$ पे० चा $\frac{१}{२}$ आहे,	० - - ० - - ०$\frac{१}{४}$		१ - १६ - - १$\frac{३}{४}$
बेरीज केल्यानें,	पौं० ० - - ९ - - १०$\frac{३}{४}$		पौं० ८५८ - - ९ - - ३$\frac{१}{४}$

सर्व उदाहरणांत, पहिल्यानें सांगीतल्ये किंमतीचे पुष्कळ भाग करावे, असे कीं त्यांतून प्रत्येक भाग त्याचे पूर्वींचे भागाचा कांहीं सरळ * अपूर्णांक असेल. हे भाग करण्याविषयीं कांहीं रीति सांगतां येत नाहीं, परंतु प्रत्येक उदाहरणांत भाग कसे करावे, याची रीति अभ्या-

*एकाचा कोणताहि अपूर्णांक ज्याचा अंश एक आहे, त्यास त्या एकाचा निःशेष भाग बहुतकरून ह्मणतात. जसें. २ शि० आणि १० शि० हे दोन्हीं एक पौंडाचे निःशेष भाग आहेत, कारण ते $\frac{१}{१०}$पौं० आणि $\frac{१}{२}$ पौं० आहेत.

सानें समजेल. याप्रमाणें भाग केल्यावर प्रत्येक भाग, किंमत आहे असें मानून, सर्व परिमाणांची किंमत काढावी आणि नंतर त्यांची बेरीज घ्यावी.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

२४३ह० यांस काय पडेल, जर १ह० यास १४पौं० १८शि० ८$\frac{1}{4}$पे० पडतात?

उत्तर. ३६२९पौं० १शि० ०$\frac{3}{4}$पे०

एक बुशलास २पौं० १शि० ३$\frac{1}{4}$पे० पडतात, तर १६९ बुशलांस काय पडेल?

उत्तर. ३४८पौं० १४शि० ९$\frac{1}{4}$पे०

एक क्वारटरास १९ शि० २ पे० पडतात, तर २७३ क्वार्टरांस काय पडेल?

उत्तर. २६१पौं० १२शि० ६पे०

जर १ बिघ्यास २रु० १३आ० ७पै पडतात, तर ५९५ बिघ्यांस काय पडेल?

उत्तर. १६९५ रु-- २ आ-- १ पै.

२३१. जेव्हां दिलेलीं परिमाणें कोष्टकाचा अनुक्रमाप्रमाणें नसतील, परंतु व्यवहारी, किंवा दशांश अपूर्णांक असतील, त्यांसहि या रिती लावितां येतील, असें या सर्व अध्यायापासून कळेल. याविषयीं हीं पुढील उदाहरणें आहेत.

एक हंड्रेडवेटास २रु० १आ० ३पै पडतात, तर २७२·३४७९ ह० काय पडेल?

उत्तर ५६५·९७२९ रु०, अथवा ५६५रु० १५आ० ६पै.

एक शेरास २ आणे, ६ पै प्रमाणें ६६$\frac{1}{2}$ शेरांस १०रु ६आ० ३पै पडतात.

एक एकरास ३·१०७६ पौं० पडतात, तर २७९·३०१ एकरांस किती पौं० शि० पे० पडतील?

उत्तर, ८६७·९५५८पौं०, अथवा ८६७ पौं० १९शि० १$\frac{1}{4}$पे०

उत्तर २·३१४६पौं०, अथवा २पौं० ६शि० ३$\frac{१}{२}$पे०

जर १ तोळा सोन्यास १५रु० १०आ० ८पै पडतात, तर ५२० तोळे ९ मासे यांस काय पडेल ?

उत्तर, ८१५८रु० ६आ० ८पै.

२३२. दर दिवसास अमुक रकम सांगीतली, तर एक वर्षांत एकंदर किती होईल, हें जाणायाची वारंवार गरज लागती. ही रकम थोडक्यांत काढितां येईल, कां कीं जापेक्षां एक वर्षाचे दिवसांची संख्या, २४०+१२०+५ आहे; तर दरदिवस एक पेनी प्रमाणें १वर्षांत १पौं०, $\frac{१}{२}$पौं०, आणि ५ पेनी एकंदर होतील. त्यावरून ही रीति निघती. दररोज सांगीतल्ये रकमे प्रमाणें, एक वर्षांत एकंदर किती होईल, हें जाणायासाठीं, त्या रकमेंत पेनी आणि पेनीचे अपूर्णांक किती आहेत हें काढ; त्यांस त्यांचें अर्ध मिळवून जितक्या पेनी होतील तितके ते पौंड आहेत, आणि प्रत्येक फार्दिंग ५ शिलिंगांबरोबर आहे असें समज; नंतर दररोजाचे रकमेची पांचपट त्यांत मिळवली असतां, वर्षाची सगळी एकंदर कळेल. उदाहरण, दररोज १२ शि० ३$\frac{३}{४}$पे० प्रमाणें एक वर्षांत एकंदर रकम किती होईल? यांत १४७$\frac{३}{४}$ पेनी आहेत, आणि त्यांचें अर्ध ७३$\frac{७}{८}$ पेनी आहे, तर या दोहोंची बेरीज २२१$\frac{५}{८}$ पेनी आहे, हे पौंड ह्मटले असतां २२१पौं० १२शि० ६पे० होतील. पुनः १२शि० ३$\frac{३}{४}$पे०×५हे ३पौं० १शि० ६$\frac{३}{४}$पे० आहेत, हे पूर्वींचे रकमेशीं मिळवले असतां, एक वर्षाची एकंदर रकम २२४पौं० १४शि० ०$\frac{३}{४}$पे० होईल. त्याच रितीप्रमाणें, दररोज २शि० ३$\frac{१}{२}$पे० प्रमाणें एकवर्षाची रकम ४१पौं० १६शि० ५$\frac{१}{२}$पे० आहेत; आणि दररोज ६$\frac{३}{४}$ पे० प्रमाणें वर्षाची एकंदर १०पौं० ५शि० ३$\frac{३}{४}$पे० आहेत; आणि दररोज ११पे० प्रमाणें वर्षाची एकंदर १६पौं० १४शि० ७पे० आहेत.

२३३. वहिवाटीचे कामास चालेल अशी, पुढील्प्रमाणें वरचे रितिचे उलटी रीति काढितां येईल; जर एक वर्षांत ३६०, अथवा २४० चे $\frac{३}{२}$ दिवस असतात असें कल्पिलें, तर दरवर्षास जी रकम आहे, त्यांतून तिचा $\frac{१}{३}$ यांश वजा केला तर बाकी २४० दिवसांचें प्रमाण नि-

घेल; आणि अशा रितीनें काढलेला प्रत्येक पौंड, पेनी असें मानिलें असतां, ते पेनी एक दिवसाची रकम होईल. परंतु जापेक्षां वर्ष ३६० दिवसांचें नाहीं, परंतु ३६५ चें आहे, ह्मणून वर ठरविल्याप्रमाणें प्रत्येक दिवसाच्या भाग घेऊन, त्यास ३६५ भागांत विभागून त्यांतून ५ काढिले, तर ३६० या सर्व भागांतून जी सर्व रकम वजा केली ती, अथवा ३६०×५ तशेले भाग, यांतून पहिल्यानें जे ५ दिवस सोडले आहेत, त्यांतले प्रत्येक दिवसास ३६० भाग येतील. जापेक्षां आरंभी ३६० भाग केले आणि ३६५ तून ५ भाग काढिले, ह्मणून प्रत्येक पहिल्ये दिवसाविषयीं ३६० भाग राहिले; यामुळें या अधिक कृतीनें वर्षाची सर्व रकम ३६५ दिवसांस सारखी वांटिली जाती. आतां ३६५ तून ५ भाग, हे ७३ तून एक भाग घेतल्याप्रमाणें आहे. अथवा खरें उत्तर काढायासाठीं, पहिल्ये उत्तरांतून त्यांचा ७३ वा भाग वजा केला पाहिजे. दिवसाचा दर जर फार मोठा नसला, तर ७२ वा भागहि चालेल, आणि ७२ फार्दिंग हे १८ पेनी आहेत, ह्मणून दर ३८ पेनीस एक फार्दिंग वजा केल्याप्रमाणें, अथवा दर ३ शि०, यांस $\frac{1}{2}$ पेनी, अथवा दर ३ पौंडांस १० पे० याप्रमाणें वजा करणें हें बरोबर आहे. त्यावरून रीति पुढीलप्रमाणें आहे. वर्षाची सांगितलेली रकम होण्यास दररोज काय द्यावें लागेल, हें जाणायासाठीं, सांगितल्ये रकमेंतील शिलिंग इत्यादि यांस (२२१) प्रमाणें पौंडाचें दशांशरूप दे; त्यांतून त्यांचा तिसरा भाग वजा करून, बाकी राहिलेले पौंड, पेनी आहेत असें मनांत समजावें; नंतर त्यांत प्रत्येक १८पेनीसाठीं १ फार्दिंग, अथवा प्रत्येक ३ पौंडांसाठीं १०पेनी वजा करावे. उदाहरण, दर वर्षास जर २२४पौं० १४शि० ०$\frac{3}{4}$पे० असतील, तर दर दिवसास काय होईल? हे २२४·७०३पौं०आहेत, आणि त्यांचा तृतीयांश ७४·९०१पौं० आहेत, हे २२४·७०३पौं० यांतून वजा केले, तर १४९·८०२पौं० बाकी राहातात, हे पेनी आहेत, तर ते १२ शि० ५·८०२ पेनी होतात, ह्मणून यांत १शि० ६पे० किंवा १८पेनी ८ वेळा जातात. याजकरितां ८ फार्दिंग अथवा २ पेनी वजा करून १२शि० ३·८०२पे०हे राहातात, ह्मणजे एक फार्दिंगाचे $\frac{1}{20}$ इतक्ये अंतरानें मात्र खरे उत्तराजवळ हें उत्तर होतें. या तऱ्हेनें वर्षास १००पौं० असले, तर दर दिवसास ५ शि० ५$\frac{3}{4}$ पे० होतील.

रकम किती होईल हें जाणायाची वारंवार गरज लागती. आतां १ रूप-यांत १९२ पै आहेत, त्यांची दुप्पट ३८४ आहेत, ह्मणजे हे ३६५ पेक्षां १९ नीं अधिक आहेत, आणि १९२ चा दहावा अंश १९·२ आहे. तर यावरून रीति याप्रमाणें आहे; दर दिवसास किती पै आहेत त्या काढून, त्यांची दुप्पट करून, त्या दुपटीचा २० वा भाग किंवा पहिल्याचा १० वा भाग त्यांतून वजा करून, बाकी रुपये आहेत असें समजून, वर्षाची जवळजवळ एकंदर रकम निघेल. बरोबरच रकम काढायासाठीं, एक दिवसाचे रकमेचा पंचमांश मिळीव.

उदाहरण. दर दिवसास १रु० १०आ० ३पै० प्रमाणें एक वर्षाची किती एकंदर रकम होईल?

रु०

१ रुपया दिवसास - - - ३६५·०००

१०आ० ३पै० = १२३पै

तर, $१२३ \times २ - \frac{123}{10} =$ २३३·७००

रु० ५९८·७००

रु० आ० पै.

= ५९८ ११ २·४

$\frac{1}{5} \times$ १०आ० ३पै = ० २ ०·६

हें उत्तर, रु०५९८ - - १३ - - ३

वहिवाटीचे कामास चालेल अशी, पुढीलप्रमाणें वरचे रितीचे उलटी रीति काढितां येईल. ३६५ चें अर्ध १८२·५ आहे, ह्मणजे हें १९२ पेक्षां ९·५ इतक्यानें कमी आहे;

१८२·५ याचा २० भाग ९·१२५ आहे.

आणि त्याचा ५०० भाग ·३६५ आहे.

९·४९०

तर रीति हीच आहे;

वर्षाचे प्राप्तीला, रुपये आणि रुपयांचें दशांश रूप देऊन, त्याचें अर्ध घे; नंतर या अर्धाला त्याचा २० वा आणि ५०० वा भाग मिळवून, पैचे रुपांत दिवसाचा दर $\frac{1}{365000}$ इतक्या अंतरानें खरा येईल.

उदाहरण, वर्षाची प्राप्ती ६०० रुपये असली, तर दर दिवसाची किती प्राप्ती आहे ?

दरदिवसास १ रुपयाप्रमाणें वजा करून बाकी २३५ राहातात;

२३५ चें अर्ध ----- ११७·५ आहे

११७·५ यांचा २० वा अंश ----- ५·८७५ आहे

११७·५ यांचा ५०० वा अंश ----- ·२३५ आहे

१२३·६१०पै.

१२३·६ पै = १० आ० -- ३·६ पै आहेत.

यावरून दिवसाचा दर, १ रु० १० आ० ३·६ पै आहे.

पुनः दिवसाचा दर सांगीतला असतां, महिन्याची काय प्राप्ती होईल हें जाणायास इच्छिलें आहे असें मनांत आण.

रुपयांत १६ आणे आहेत, आणि त्यांची दुप्पट ३२ आहेत. यामुळें रीति याप्रमाणें आहे; दिवसाचे दराला आण्याचें आणि आण्याचे दशांशाचें रूप देऊन, त्याची दुप्पट कर; आणि हे रुपये आहेत असें मनांत आण. नंतर महिना ३० किंवा ३१ दिवसांचा असेल त्याप्रमाणें दोन किंवा एक दिवसाची प्राप्ती त्या रकमेंतून वजा कर.

उदाहरण, दरदिवसास ७ आ० ५ पै प्रमाणें आगष्ट महिन्याची प्राप्ती किती होईल ?

आ० पै आ०

७ --- ५ = ७·४१६६; यांची दुप्पट = १४·८३३

रु० आ० पै

= १४·८३३ रुपये = १४ -- १३ -- ४

यांतून एक दिवसाचा दर वजा कर. ७ -- ५

उत्तर. रुपये १४ .. ५ .. ११

जेव्हां दिवसाचा दर लहान आहे, तेव्हां मात्र ही रीति उपयोगी पडेल.

[illegible] ही पुढील रीत चालेल.

महिन्याचे प्राप्तीला रूपये आणि रूपयांचे दशांशाचें रूप दे, आणि महिन्याचे ३० किंवा ३१ दिवस असतील, तर महिन्याचे प्राप्तीस तिचा ३० वा किंवा ३१ वा भाग मिळवून ती बेरीज दोहोंनीं भाग, तो भागाकार आण्याचे रूपानें दिवसाची प्राप्ती होईल.

अथवा जापेक्षां $\frac{१}{३०}$ हा $\frac{१}{३१}$ यापेक्षां $\frac{१}{९३०}$ इतक्यानें अधिक आहे, आणि हें अंतर $\frac{१}{१०००}$ यांचें जवळ जवळ आहे; ; ह्मणून जर महिना ३१ दिवसांचा आहे, तर $\frac{१}{३०}$ मिळवून आणि $\frac{१}{३१}$ यांस मिळवूं नये परंतु रकमेचा $\frac{१}{१०००}$ वा भाग वजा केला असतां एक दिवसाची प्राप्ती निघेल. यांत $\frac{१}{२४०००}$ इतकी मात्र सर्व रकमेवर चूक होईल.

उदाहरण, ३१ दिवसांचे महिन्याची २५ रुपये प्राप्ती असेल, तर एक दिवसाची किती किंमत होईल?

पहिल्ये रितीप्रमाणें, २५ + $\frac{२५}{३१}$ = २५·८०६४५
यांचें अर्ध = १२·९०३२ आणे
उत्तर, .. १२ आ० .. १०·८३८ पै;

दुसऱ्ये रितीप्रमाणें, २५ + $\frac{२५}{३०}$ = २५·८३३३३
यांचा $\frac{१}{१०००}$ वजा करून ह्मणजे = ·०२५८३
२५·८०७५०
यांचें अर्ध = १२·९०३७५ आणे.

उत्तर, १२ आ० - - १०-८४५ पै, ह्मणजे, या आणि वरचे उत्तरांत पैचे एक शतांशापेक्षां अंतर कमी आहे, ह्मणून तें फारच थोडें आहे.

२३४. लांबीचीं मानें आणि क्षेत्रांचीं मानें यांमध्यें जो पुढें संबंध दाखविला आहे, तो भुमीतीशीं अंकगणिताचें संगतीकरण याचा आश्रय आहे. खालचे **अबकड** आकृतीस भुमीतींत **काटकोनचौकोन** ह्मणतात. मनांत आण कीं **अब** बाजू ६ इंच आणि **अक** बाजू ४ इंच अशी आहे.

अ अ व क ड ई ब

फ ग ह इ क्ष य ज्ञ

क ल म न ओ प ड

अब आणि **कड** या दोन बाजूंची लांबी बरोबर आहे, तर त्या प्रत्येकीस, अ, ब, क, आणि ल, म, न इत्यादि बिंदूंवर एक एक इंच लांबीचे सहा समभागांतविभाग; **अक** आणि **बड** या दोन रेघाहि परस्पर बरोबर आहेत, यांतून प्रत्येकीस फ, ग, ह, क्ष, य, आणि ज्ञ या बिंदूंवर एक एक इंच लांब अशा ४ समभागांत विभाग. अ, आणि ल, ब आणि म, इत्यादि, आणि फ आणि क्ष इत्यादि सरळ रेघांनीं सांध. असें केल्यानें **अबकड** ही आकृति अनेक चौरसांत विभागिलीं असें होईल; कां कीं चौरस ह्मणजे काटकोन चौकोन ज्याचा सर्व बाजू बरोबर आहेत, आणि यामुळें **अअफइ** चौरस आहे. कां कीं **अअ** आणि **अफ** सारिखेच लांबीचा आहेत, ह्मणजे, त्या दोहोंची लांबी १ इंच आहे. अशा चौरसांचा चार ओळी आहेत, आणि प्रत्येक ओळींत सहा चौरसें आहेत, ह्मणजे एकंदर ६×४, अथवा २४ चौरसें आहेत, त्या प्रयेक चौरसाची बाजू एक इंच लांबीची आहे, आणि त्यांतील प्रत्येक चौरस (२१९) प्रमाणें एक **चौरस इंच** आहे असें ह्मणतात. तसेच कल्पनेनें, जर एक बाजूची लांबी ६ **यार्ड** आणि दुसरे बाजूची लांबी ४ **यार्ड** असती, तर त्या आकृतीचें क्षेत्र ६×४, किंवा २४ चौरस **यार्ड** होतें; आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

२३५. आतां मनांत आण कीं **अबकड** याचा बाजूंत इंचांची कांहीं पूर्ण संख्या नाहीं, परंतु त्यांची लांबी कांहीं इंच आणि इंचाचे अपूर्णांक आहे.– उदाहरण, **अबची** लांबी ३$\frac{1}{2}$ इंच, अथवा (११४) प्रमाणें एक

क ड

फ ग

इंचांचे ९/४ आहे असें मनांत आण. **अब**चे दुप्पटीचे बरोबर **अई** रेघ कर, आणि **अक**चे लांबीचे चौपटीबरोबर **अफ** रेघ कर, नंतर **अइफग** काटकोनचौकोन पुरें कर. या आकृतीचे बाकीचे अवयवांविषयीं कांहीं सांगण्याचें प्रयोजन नाहीं. तर, जापेक्षां **अब**चे दुप्पट **अई** आहे, अथवा ७/२ इंचांचे दुप्पट आहे, ह्मणजे, अइची लांबी ७ इंच आहे; आणि जापेक्षां

अफची लांबीहि **अक**चे लांबीचे चौपट आहे, अथवा ४ वेळा ९/४ इंच आहे, ह्मणजे, **अफ**ची लांबी ९ इंच आहे. यामुळें **अइफग** या सर्व काटकोन चौकोनांत, (२३४)प्रमाणें, ७×९ अथवा ६३ चौरस इंच आहेत. परंतु **अइफग** या काटकोनचौकोनांत आठ दुसरे काटकोनचौकोन आहेत, ते सर्व **अबकड** या आकृती सारिखे आहेत; आणि यामुळें **अइफग** याचा **अबकड** एक अष्टमांश आहे, ह्मणजें, **अबकड** यांत ६३/८ चौरस इंच आहेत. परंतु ६३/८ हे (११८) प्रमाणें ९/४ आणि ७/२ हे परस्पर गुणिल्यानें होतात. या आणि मागील कलमापासून असें दिसतें, कीं काटकोनचौकोनाचा बाजूंची लांबी पूर्ण इंच किंवा अपूर्ण इंच असली, तरीं त्याचे बाजूंची लांबी जी इंचांची संख्या असेल, त्यांचे गुणाकारानें त्या क्षेत्रांतील चौरस इंचांची संख्या कळेल. चौरस ह्मणजे काटकोनचौकोन आहे, जाचा सर्व बाजू बरोबर आहेत, आणि यामुळें, त्याचे एक बाजूचे इंचांची संख्या तिणें तीच गुणल्यानें चौरसाचे चौरस इंचांची संख्या कळेल. उदाहरण, जा चौरसाचे बाजूची लांबी १३ इंच आहे त्यांत १३×१३, अथवा १६९ चौ० इं. आहेत.

२३६. अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

एक खोलीचा बाजू ४२ फु० ५ इं० आणि ३१ फु० ९ इं० आहेत, तर त्या खोलीचें क्षेत्र किती चौरस फुटी आणि चौरस इंच होईल? आणि त्या खोलीस बैठक करण्याकरितां वस्त्र ३/४ यार्ड रुंदीचें आहे, तेव्हां तें किती लांब घेतलें असतां पुरेल?

उत्तर. १३४६ चौरस फुटी आणि १०५ चौरस

इंच खोलीचें क्षेत्र; आणि ९९८ फुटी, ६$\frac{५}{६}$ इंच इतक्या लांबीचें वस्त्र घेतलें पाहिजे.

एक काटकोनचौकोन शेताचा बाजू २५२यार्ड आणि $\frac{१}{४}$ मैल आहेत; तर त्यांत किती एकर आहेत ?

उत्तर. २३ एकर आहेत.

एक काटकोनचौकोन तळ्याची लांबी २०० काठ्या व रुंदी ८० काठ्या आहे, त्या तळ्याचें क्षेत्र किती चौरस बिघे होईल.

उत्तर. ४० बिघे.

१८ चौरस मैल आणि १८ मैल लांबीचें चौरस, अथवा १८ मैलांचें चौरस, या दोहोंत किती अंतर होईल ?

उत्तर. ३०६ चौरस मैल.

२३७. (२१४) कलमांतील मानांपासून (२१५) कलमांतील मानें या वरचे रितीनें काढिलीं आहेत; कां कीं एक्ये फुटींत १२ इंच आहेत, ह्मणून १२×१२, अथवा १४४ चौरस इंच ह्मणजे एक चौरस फुट होतो हें उघड आहे, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. याचप्रमाणें एक घन अथवा काटकोनचौकोनभरींव,* याचा जा तीन बाजू एका बिंदूंत मिळतात, त्यांचे लांबीचे इंच एकत्र गुणिल्यानें त्या आकृतींत जे घन इंच असतात, ते कळतात. जसें ६ इंचांचे घनांत ६×६×६, अथवा २१६ घन इंच आहेत; जा पेटीचा बाजू ६,८, आणि ५ फुटी लांबीचा आहेत, तींत ६×८×५, अथवा २४० घन फुटी आहेत. ह्मणून (२१४) कलमांतील लांबीचे मानांपासून (२१६) तील मानें याच रितीवरून काढिलीं आहेत.

---

*काटकोनचौकोनभरींव ही आकृति इटेचे आकृतीसारिखी आहे, आणि घन काटकोनचौकोनभरींव आहे. परंतु त्याचा सर्व बाजू बरोबर आहेत. जसें रमलाचा फांसा.

दुसरा भाग.

त्रिराशि.

२३८. जर २२ यार्डांचें मोल १७रु० ४आ० आहे, तर १५६ यार्डांचें मोल किती होईल? हें जाणायाची इच्छा आहे असें मनांत आण. १७रु० ४आ० यांस आण्यांचें रूप दिलें असतां, २७६ आणे येतील; आणि जर २२ यार्डांचें मोल २७६ आणे आहे, तर एक यार्डाची किंमत $\frac{२७६}{२२}$ आणे होईल. परंतु १५६ यार्डांचें मोल, एक यार्डाचे किंमतीचे १५६ पट आहे, यामुळें त्यांची किंमत $\frac{२७६}{२२}\times१५६$ आणे, अथवा (११७) प्रमाणें $\frac{२७६\times१५६}{२२}$ आणे होईल. पुनः जर $१२\frac{१}{२}$ शेर गुळास ११ आणे पडतात, तर २०रु० ३आण्यांचा किती गूळ येईल? जापेक्षां $१२\frac{१}{२}$ शेरांची किंमत ११ आणे आहे, तर दुप्पट शेरांस दुप्पट आणे पडतील, ह्मणजे २५ शेरांस २२आणे पडतील, आणि २५ शेरांचा २२ वा भाग, अथवा $\frac{२५}{२२}$ एक आण्यास येईल; परंतु २०रु० ३आणे यांत ३२३ आणे आहेत; आणि जापेक्षां एक आण्यास $\frac{२५}{२२}$ शेर येतात, तर ३२३ आण्यांस $\frac{२५}{२२}\times३२३$, अथवा (११७) प्रमाणें $\frac{२५\times३२३}{२२}$ शेर गूळ येईल.

२३९. व्यवहारी गणितांत, जी रीति सर्व दुसऱ्या रितींपेक्षां अधिक कामास पडत्ये, आणि जा रितीनें वरचे सारिखे प्रश्न होतात, त्या रितीस **त्रिराशि** ह्मणतात, कां कीं तींत तीन परिमाणें दिलेलीं असतां, त्यांपासून चवथें परिमाण काढायाचें असतें. वरचे दोन उदाहरणांपासून ही पुढील रीति निघती, आणि त्याच कल्पनेप्रमाणें असें दिसेल, कीं ही रीति त्याच सारिखे सर्व दुसऱ्ये पक्षांस लागू होईल.

वरचे दोन उदाहरणांत एक्ये जातीचीं दोन परिमाणें आहेत, आणि तिसरें परिमाण निराळ्ये जातीचें आहे, आणि उत्तर या तिसऱ्ये परिमाणाचे जातीचें असावें, ही गोष्ट लक्षांत ठेविली पाहिजे. जसें, पहिल्ये उदाहरणांत २२ यार्ड आणि १५६ यार्ड, आणि २७६ आणे आहेत, आणि जें काढायाचें इच्छिलें आहे तें आण्यांची कांहीं संख्या आहे.

दुसऱ्ये उदाहरणांत, ११आणे आणि ३२३आणे, आणि १२$\frac{१}{२}$ शेर आहेत, आणि जें काढायाचें आहे तें शेरांची कांहीं संख्या आहे. हीं सांगितलीं तीन परिमाणें एका ओळींत मांड, अशीं कीं जें परिमाण केवळ एक जातीचें आहे, तें उजवे शेवटाकडेस होईल, आणि या शेवटील परिमाणाचे संबंधाचें जें परिमाण आहे, तें डावेकडेस आरंभीं मांड.* तिसरें परिमाण त्या दोहोंचे मध्यें मांड. पहिल्ये उदाहरणांत वेगळाल्ये परिमाणांचा क्रम या पुढीलप्रमाणें होईल. जसें;

२२ यार्ड. १५६ यार्ड. १७ रू० ४ आ०

दुसऱ्ये उदाहरणांत तीं याप्रमाणें मांडिलीं जातील;

११ आ० २० रू ३ आ० १२$\frac{१}{२}$ शे०

पहिल्ये आणि दुसऱ्ये परिमाणास एकरूप कर. जसें, दुसऱ्ये उदाहरणांत २० रू० ३आणे यांस, (२१९) प्रमाणें आण्यांचें रूप दिलें पाहिजे. सोईस पडेल तर तिसरे परिमाणासहि दुसऱ्ये कोणत्येहि नामाचें रूप देतां येईल; अथवा, जसें वरचे दुसऱ्ये उदाहरणाप्रमाणें, पहिलें आणि तिसरें परिमाण इच्छेस येईल त्या परिमाणानें गुणावें, आणि असा गुणाकार केल्यानें कांहीं फेर होत नाहीं, हें (२३८) आणि (१०८) कलमांतील उत्तरावरून दिसेल. दुसरें आणि तिसरें परिमाण परस्पर गुणून, तो गुणाकार पहिले परिमाणानें भाग. जो भागाकार येईल तो ओळींतील तिसरे परिमाणाचे जातीचा होईल, आणि तें इच्छिलें उत्तर होईल. जसें पहिल्ये उदाहरणाचें उत्तर (२३८) प्रमाणें $\frac{२७६\times१५६}{२२}$ आणे, अथवा $\frac{१७रू०\cdot\cdot४आ०\times१५६}{२२}$ आहे.

---

*उदाहरण सांगत्येसमयीं बहुतकरून पहिल्या आणि तिसऱ्या स्थळींचीं परिमाणें वाक्यांत जवळ जवळ असतात. परंतु कांहीं पक्षांत पहिल्या स्थळीं कोणतें परिमाण मांडावें, हें शोधण्यास शिकणारास विचार करावा लागेल. (२३८) कलमांत ज्या कल्पना सांगितल्या आहेत, त्यांपासून वरची गोष्ट कळेल. आतां पुढें जें लिहिलें आहे तें बहुधा उपयोगी पडेल. ज्या जातीचें उत्तर असावें त्या जातीचें जें दिलेलें परिमाण आहे, त्यापेक्षां उत्तर कमी असावें असें जर स्पष्ट दिसेल, तर तें दिलेलें परिमाण राहिल्ये दोन परिमाणांतून, लहान परिमाणानें गुणावें; जर त्या परिमाणापेक्षां उत्तर अधिक असें असेल, तर त्यास मोठ्या परिमाणानें गुणावें; जसें पहिल्या उदाहरणांत २२ यार्डांपेक्षां १५६ यार्डांस अधिक किंमत पडेल असें स्पष्ट दिसतें, ह्मणून एथें उत्तराचा जातीचे परिमाणास १५६यांणीं गुणिलें पाहिजे.

यार्ड यार्ड रू० आ०

२२ : १५६ :: १७ . . ४

```
              १६
             ----
             २७६
             १५६
            -----
            १६५६
           १३८०
           २७६
          -------
   २२)४३०५६(१९५७ आणे २/२२, अथवा १/११;
      २२              अथवा १२/११ = १ १/११ पै
      ---
      २१०           रू०     आ०    पै०
      १९८           १२२ - -  ५ - - १ १/११.
      ----
       १२५
       ११०
       ----
(२२८)प्रमाणें १५६
        १५४
        ----
        ००२
```

१७रू० _ ४ आणे यांस आण्यांचें रूप न देतां या पुढील प्रमाणें कृति होईल.

---

* वर दाखविल्याप्रमाणें वेगळाले परिमाणांचे मध्यें बिंदू मांडण्याची चाल आहे. या पुस्तकाचा आठवा भाग जास पुरतेपणीं समजला, त्यास त्वरेनें दिसेल, कीं त्रिराशीची रीति ही कांहीं प्रमाणांतले तीन पदांपासून, चवथें पद काढण्याची कृति मात्र आहे.

```
यार्ड   यार्ड    रु०   आ०
२२ : १५६ :: १७ . . ४
                 १५६                                  (२२७
        ─────────────
     २२)२६९१ . . ०(१२२रु० . ५आ० . १ 1/11 पै०(२२८)
        २२
        ───
         ४९
         ४४
         ───
          ५१
          ४४
          ───
           ७×१६=११२
                 ११०
                 ───
                   २×१२=२४
                          २२
                          ──
                           २
```

कांहीं विशेष पक्षाला वरचा दोन रितींतून कोणती सोईस पडेल, हें शिकणारास अभ्यासानें कळेल, कां कीं याविषयीं कांहीं रीति सांगतां येत नाहीं.

२४१. तीन सांगीतलीं परिमाणें एकाच नावांचीं असतील असें कदाचित् घडेल; तथापि त्यांतून दोन एका जातीचीं, आणि तिसरें निराळ्ये जातीचें आहे असें दिसेल. उदाहरण, एक रुपयाचे मिळकतीस ४आ० ६पै० देणें पडतें, तर ४०० रुपयांचे मिळकतीस काय देणें पडेल ? या उदाहरणांत ४००रु०, ४आ० ६पै०, आणि १ रु० हीं तीन दिलेलीं परिमाणें नाण्याचे जातीचीं आहेत. तथापि, त्यांतून पहिलें आणि तिसरें परिमाण मिळकतीचे जातीचें आहे; दुसरें परिमाण देण्याचे जातीचें आहे; आणि उत्तरहि त्याच जातीचें इच्छिलें आहे, आणि यामुळें, (१९२) प्रमाणें तीं परिमाणें या पुढीलप्रमाणें मांडलीं पाहिजेत;

१रु० : ४००रु० :: ४आ० ६ पै०

२४२. पुढें जीं उदाहरणें अभ्यासाकरितां दिलीं आहेत, त्यांस या रितीचा आश्रय आहे हें स्पष्ट दिसेल, अथवा स्पष्ट न दिसल्यास या रितीचा आश्रय आहे, हें कांहीं विचारानें दिसून येईल. ही रीति कशी लावावी याचा ठराव करण्यास कांहीं विचार करावा लागतो, अशीं पुष्कळ उदाहरणें आहेत.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

जर १० मण, ३० शेर साखरेस ५६ रुपये, २ पावले, ४० रेस पडतात, तर १ खंडी, ४ मण, ५ शेरांस काय पडेल?

उत्तर. १२७ रु० २ पा० ३२ रे $\frac{३४}{४३}$.

जर ३अ० २६मि० १२से० इतक्या वेळांत, एक घोडा १४मै० ३फ० २७या० चालतो, तर २३मै० चालायास किती वेळ लागेल?

उत्तर. ५अ० २९ मि० ३४से० $\frac{२४६२}{२५३२७}$.

अ आणि ब अशा दोन पुरुषांचें दिवाळें निघालें, आणि दोघांचें कर्ज बरोबर आहे; दर पौंडास १५शि० ४$\frac{१}{२}$पे० प्रमाणें अ ला देण्याचें सामर्थ्य आहे, आणि ब ला केवळ ७शि० ६$\frac{३}{४}$पे० याप्रमाणें देण्याचें सामर्थ्य आहे. दिवाळें निघते समयीं अचे जवळ ब पेक्षां १३०४पौं० १७शि० अधिक आहेत; तर प्रत्येकाचें कर्ज किती देणें आहे?

उत्तर. ३३४० पौं० ८शि० ३$\frac{३}{४}$पे० $\frac{९}{२५}$.

एका प्रांतांतील दर १२$\frac{१}{२}$ एकरांस, दुसऱ्ये प्रांतांत ५६$\frac{१}{४}$ एकर आहेत. दुसऱ्ये प्रांतांत एकंदर १७३०० चौरस मैल आहेत. यावरून पहिले प्रांतांत एकंदर किती चौरस मैल असावे ? पुनः, पहिल्ये प्रांतांतील दर ३ मनुष्यांस, दुसऱ्ये प्रांतांतील ५ मनुष्य आहेत; आणि पहिल्ये प्रांतांतील २० एकर जमिनीवर २७ मनुष्यें रहातात असें मनांत आण, तर प्रत्येक प्रांतांत किती मनुष्यें असावीं?

उत्तर. पहिल्ये प्रांतांत ३८४४$\frac{४}{९}$ चौरस मैल आहेत, आणि त्यांत ३३२१६०० इतके लोक आहेत; आणि दुसऱ्ये प्रांतांत ५५३६००० इतके लोक आहेत.

पडतात, तर १ यार्ड रुंदीचे ११८$\frac{1}{4}$ यार्डांस काय पडेल?

उत्तर. ३३२पौं० ५शि० २$\frac{4}{17}$पे०

जर ९रु० ३आ० ६पै साहा आठवडे पर्यंत पुरतात, तर १००रु० किती वेळपर्यंत पुरतील?

उत्तर. ६५$\frac{25}{295}$ आठवडे.

दर औंसास १०पे० प्रमाणें २ह० चाहाचे बदलींत, दर पौंडास ९$\frac{3}{4}$पे० प्रमाणें दराची साखर किती घ्यावी लागेल?

उत्तर, ३२ह० ३क्वा० ७पौं० $\frac{35}{39}$.

२४३. मनांत आण कीं हा पुढील प्रश्न केला आहे; ह्मणजे, जें काम ४५ मनुष्यें १० दिवसांत करितात, तें काम १५ मनुष्यें किती दिवसांत करितील? तर तें काम करण्यास ४५×१० अथवा ४५० दिवस एक मनुष्यास लागतील. आणि त्याच वेळेचे एक पंधरांश काळांत १५ मनुष्यें करितील, ह्मणजे $\frac{450}{15}$ अथवा ३० दिवसांत करितील, हें उघड आहे. ह्या आणि ह्या सारिख्या दुसऱ्या कल्पनेवरून पुढील प्रश्न उलगडतां येतील.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

जर १२ दिवसांत एक एकरांतील गवत १५ बैल खातात, तर १४ एकर खाण्यास २६ बैलांस किती दिवस लागतील?

उत्तर. ९६$\frac{12}{13}$ दिवस.

जर ६ दिवसांत ५ फुट उंचीची भिंत २२ गंवडी करितील, तर १० फुटी उंचीची भिंत करण्यास ४३ गंवड्यांस किती दिवस लागतील?

उत्तर. ६$\frac{6}{43}$ दिवस.

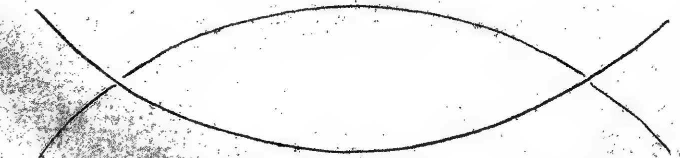
२४४. जा प्रश्नसमुदायांचे उलगडण्यास **दुहेरी त्रिराशि** अथवा पंचराशि ह्मणतात, त्या जातींचीं वरचे कलमांत उदाहरणें आहेत, दुहेरी त्रिराशिकास खरें ह्मटलें असतां पंचराशिक ह्मणावें, कां कीं त्यांत पांच परिमाणें दिलेलीं असून, त्यांपासून साहावें परिमाण काढायाचें असतें. उदाहरण, जर ५ मनुष्यें ३० यार्ड वस्त्र ३ दिवसांत करितात,

तर ६८ यार्ड वस्त्र करण्यास ४ मनुष्यांस किती दिवस लागतील? एक मनुष्यास एक यार्ड वस्त्र करण्यास किती काळ लागेल तो पहिल्यानें, प्रश्नाचे पहिल्या भागापासून काढावा. ५ मनुष्यें ३ दिवसांत जें कांहीं करितात, त्याचा एक पंचमांश एक मनुष्य ३ दिवसांत करील, ह्मणून तो ३ दिवसांत $\frac{३}{५}$, अथवा ६ यार्ड करील. यावरून तो एक यार्ड वस्त्र $\frac{३}{६}$, अथवा $\frac{३\times५}{३०}$ दिवसांत करील. यावरून ४ मनुष्यांस ६८ यार्ड वस्त्र करण्यास किती काळ लागेल तो काढावा, जापेक्षां एक मनुष्य एक दिवसाचे $\frac{३\times५}{३०}$ इतक्या दिवसांत एक यार्ड वस्त्र करितो, तर $\frac{३\times५}{३०}\times६८$, अथवा (११६) प्रमाणें $\frac{३\times५\times६८}{३०}$ दिवसांत ६८ यार्ड करील; आणि ४ मनुष्यें तितकेंच काम एक चतुर्थांश वेळांत करितील; यावरून (१२३) प्रमाणें $\frac{३\times५\times६८}{३०\times४}$, अथवा $८\frac{१}{२}$ दिवसांत करितील.

पुनः या पुढीलप्रमाणें प्रश्न केल्यास, ह्मणजे जर ५ मनुष्यें ३० यार्ड वस्त्र ३ दिवसांत करितात, तर ६ मनुष्यें १२ दिवसांत किती यार्ड वस्त्र करितील? एथें एक मनुष्य एक दिवसांत किती करील तें काढावें, मागल्ये उदाहरणाप्रमाणें $\frac{३०}{३\times५}$ इतके यार्ड करील असें दिसतें. यावरून ६ मनुष्यें एक दिवसांत $\frac{६\times३०}{३\times५}$ यार्ड करितील, आणि १२ दिवसांत $\frac{१२\times६\times३०}{३\times५}$, अथवा १४४ यार्ड करितील.

या उदाहरणापासून खालची रीति निघती. दिलेलीं परिमाणें दोन ओळींत लिही, असीं कीं एक जातीचीं परिमाणें एकाखालीं एक येतील, आणि जीं परिमाणें परस्परांशीं संबंध ठेवितात तीं एक ओळींत मांडावीं; परंतु या संकेतानें कीं जें परिमाण क्रियेचें फळ दाखवितें, तें पहिल्ये ओळींत मध्यें असावें. वर दिलेल्ये दोन उदाहरणांचीं परिमाणें या पुढीलप्रमाणें लिहिलीं पाहिजेत;

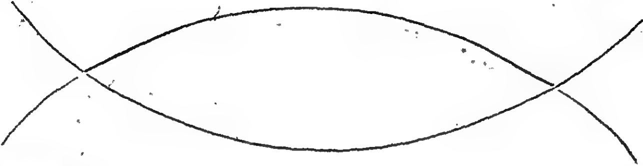
५ मनुष्यें. ३० यार्ड. ३ दिवस.



४ मनुष्यें. ६८ यार्ड.

दुसरें उदाहरण.

५ मनुष्यें. ३० यार्ड. ३ दिवस.



५ मनुष्यें. १२ दिवस.

एक ओळीचा मध्य आणि दुसऱ्ये ओळीचे शेवट यांतून एक वांकडी रेघ काढ. तर एका रेघेंत तीन परिमाणें येतील, आणि दुसरींत दोन येतील. नंतर तीन परिमाणांचे गुणाकारास, दोन परिमाणांचे गुणाकारानें भाग, जो भागाकार येईल तें उत्तर होईल.

(२३८) कलमांतील त्रैराशिकाचे रितीप्रमाणें, प्रत्येक ओळींतील परिमाणास (२१९) प्रमाणें गरज असल्यास सरळ रूप द्यावें.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

६ घोडे २ दिवसांत १७ एकर जमीन नांगरतात, तर ९३ घोडे $४\frac{१}{२}$ दिवसांत किती एकर नांगरतील ?

उत्तर. $५९२\frac{७}{८}$ एकर.

२०मनुष्यें $३\frac{१}{४}$ दिवसांत ७ काटकोनचौकोन शेतें खणितात, त्या प्रत्येकाचा बाजू ४० आणि ५० यार्ड आहेत, तर ९० आणि $१२५\frac{१}{२}$ यार्ड अशा बाजूंचीं ५३ शेतें २७ मनुष्यें किती दिवसांत खणतील ?

उत्तर. $७५\frac{२४५१}{२०७२०}$ दिवस.

जर ६० हन्ड्रे० २०मैल नेण्यास १४पौं० १०शि० पडतात, तर ५पौं० ८शि० ९पे० इतक्यानें ३० मैल पर्यंत किती ओझें जाईल ?

उत्तर. १५ हन्ड्रे०

१०० रु० यांस एक वर्षाला ५ रु० नफा मिळतो, तर ८५० रुपयांस ३ वर्षें आणि ८ महिने यांत किती नफा मिळेल ?

उत्तर. १५५ रु० १३ आ० ४पै

तिसरा भाग.

व्याज, इत्यादि.

२४५. मागील लिहिलेल्या कित्येक उदाहरणांप्रमाणें, कांहीं पैक्याचा अपूर्णांक कसा काढावा, इतकीच कृति मात्र या भागांतील सर्व उदाहरणांत येती. मनांत आण, कीं १६ रु० चे ४० भागांतून ७ भाग घेण्याचे आहेत, ह्मणजे १६रु० यांस ४० भागांत विभागून त्यांतून ७ भाग घेण्याचे आहेत. प्रत्येक भाग $\frac{१६}{४०}$रु० आहे, आणि तसे ७ भाग $\frac{१६}{४०}\times ७$, अथवा (११६)प्रमाणें $\frac{१६\times ७}{४०}$ रुपये. ही कृति या पुढील-प्रमाणें होईल.

```
          रु०
          १६
           ७
     ─────────
४०)११२(२रु० . . १२आ० . . ९३/५पै
    ८०
    ──
    ३२
    १६
    ───
   ५१२
   ४०
   ───
   ११२
    ८०
    ──
    ३२
    १२
   ───
   ३८४
   ३६०
   ───
     ४
```

९६पौं० १३शि० ७$\frac{१}{२}$ पे० यांचे १०० भागांतून १२ भाग व्यावयाचे आहेत, असें मनांत आण.

पौं० शि० पे०
५६ . . १३ . . ७$\frac{१}{२}$
१३

१००)७३६ . . १७ . . १$\frac{१}{२}$ (७पौं० ७शि० ४$\frac{१}{४}$पे$\frac{४१}{५०}$
७००
३६×२०+१७=७३७
७००
३७×१२+१=४४५
४००
४५×४+२=१८२
१००
८२

३रु०, १२आ० यांचे शंभर भागांतून, २$\frac{१}{२}$ भाग घ्यावयाचे आहेत, तर वरचे रितीवरून उत्तर $\frac{३रु०१२आ०×२\frac{१}{२}}{१००}$ आहेत, अथवा (१२३) प्रमाणें $\frac{३रु०१२आ०×५}{२००}$ ह्मणून शंभरांतून २$\frac{१}{२}$ भाग काढणें, आणि २०० तून ५ भाग काढणें, हीं दोन्हीं एकच आहेत.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

१रु० ८आ० यांचे ५३ भागांतून ७$\frac{१}{३}$ भाग घे.

उत्तर. ३आ० ३$\frac{४५}{५३}$पै.

१०७रु०, १३आ०, ४पै यांचे शंभर भागांतून ५ भाग घे.

उत्तर. ५रु० ६आ० ३$\frac{१}{५}$पै.

५६पौं० ३शि० २पे० हे ३२ पुरुषांस वांटले आहेत. तर २३ जणांचा भाग, बाकी राहिलेल्या पुरुषांचा भागांहून किती अधिक आहे?

उत्तर. २४पौं०, ११शि०, ४$\frac{१}{२}$पे$\frac{१}{२}$.

२४६. दोन रकमा असतील, तर दुसऱ्ये रकमेचे शंभर भाग करून त्यांतून पहिली रकम होण्यासाठीं किती भाग घेतले पाहिजेत, असें व्यवहारांत ह्मणत नाहीं, परंतु एक रकम दुसऱ्या रकमेचा कोणता अपूर्णांक आहे असें ह्मणतात. जसें ३३रु० ४आ० यांचें अर्ध १६रु० १०आ० आहे असें ह्मणत नाहीं, परंतु दुसरी रकम पहिलीचे दशैंक-

ड्यास ५० प्रमाणें आहे असें ह्मणतात. जसें ५रूपये हे २०० रुपयांचे दर शेंकड्यास $२\frac{१}{२}$ आहेत, जर २०० रुपयांस शंभर भागांत विभागिले, तर त्या भागांतले $२\frac{१}{२}$ भाग ५रू० आहेत. पुनः १३रू० हे ८रू०, १०आ०, ८पै यांचा दरशेंकड्यास १५० आहेत, कां कीं दुसरी रकम आणि तिचें अर्ध मिळून पहिली रकम होती. कांहीं रकमेचे ५६ भागांतून २३ भाग घेतले असतां दरशेंकड्यास काय पडेल? असें विचारिलें आहे; तर याचा अर्थ याप्रमाणें होतो; कीं ज्याजवळ ५६ रुपये आहेत, त्यास जर १०० रुपये मिळतात, तर ज्याजवळ २३ रुपये आहेत, त्यास काय मिळेल? (२३८) प्रमाणें $\frac{२३\times१००}{५६}$रू०, अथवा $\frac{२३००}{५६}$, अथवा $४१\frac{१}{१४}$रुपये होतात. यावरून ५६ तून २३ हे दरशेंकडा $४१\frac{१}{१४}$ प्रमाणें आहेत.

त्याच प्रमाणें १८ भागांतून १६ भाग, हे दर शेंकडा $\frac{१६\times१००}{८}$, अथवा $८८\frac{८}{९}$ आहेत, आणि ५ भागांतून २ भाग, हे दर शेंकडा $\frac{२\times१००}{५}$ अथवा ४० आहेत.

यापासून दुसऱ्ये अपूर्णांकांस शेंकड्याचा दर कसा काढावा याची रीति स्पष्ट कळेल.

१२रू० ३आ० यांतून ६रू० १२आ० २पै हे शेंकड्याचा काय दरानें आहेत, हें विचारिलें असें मनांत आण. ज्यापेक्षां पहिल्ये रकमेंत २३४० पै आहेत, आणि दुसऱ्ये रकमेंत १२९८ पै आहेत, यावरून पहिलीचे २३४० भागांतून १२९८ भाग दुसरी रकम आहे; ह्मणजे, मागील रिती प्रमाणें हे $\frac{१२९८००}{२३४०}$, अथवा ५५ $\frac{११००}{२३४०}$, अथवा ५५रू० ७आ० ६पै० शेंकड्याचे जवळजवळ दरानें आहेत. आणे इत्यादिकांस रुपयांचे दशांशाचें रूप दिल्यानें वरची कृति त्वरेनें होईल. तीन दशांशस्थळें घेतलीं असतां शेंकड्याचा दर, आण्यापर्यंत जवळ निघेल, आणि व्यवहारांत यापेक्षां अधिक गरज लागत नाहीं. जसें मागील उदाहरण घेतलें, ह्मणजे १२.१८७५ रू० यांतून ६.७६ रू० हे शेंकड्यास काय दरानें आहेत, असें जाणायास इच्छिलें तर, ६.७६×१०० हे ६७६ आहेत, यांस १२.१८७५ यांणीं भागिलें तर ५५.४६६ रू० अथवा ५५रू० ७आ० होतात. पुरवणींत दाखविल्याप्रमाणें केवळ खरें उत्तर काढितां येईल.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

२३३ भागांतून १९८$\frac{१}{४}$ ह्यांचा शेंकडा दर काय आहे ?

उत्तर. ८५पौं० १शि० ८$\frac{३}{४}$ पे०, अथवा ८५रु० १आ० ४पै

१९३रु० १२आ० इतक्या किमतीचें कांहीं सामान घेऊन २१६रु० १३आ० ४पै इतक्यास विकलें; तर दरशेंकड्यास काय नफा होईल ?

उत्तर. ११रु० १४आ० ७पै पेक्षां कांहीं कमी.

बचा माल अने विकून दिला, त्याचे २३०रु० १२आ० मिळाले, आणि त्यास दरशेंकड्यास ३ प्रमाणें दलाली कबूल केली आहे; तर अला किती *दलाली मिळावी ?

उत्तर. ६रु० १४आ० ९पै०

१७००रु० चा माल दलाल विकत घेतो, आणि त्याजवर दलाली दरशेंकड्यास $\frac{१}{८}$रु० कबूल केली आहे, तर त्यास सर्व दलाली किती मिळेल ?

उत्तर. २रु० २आ०

एक गलबताची किंमत १५४२३ पौं० आहे, आणि त्याचे विम्यासाठीं दर शेंकड्यास १९$\frac{२}{३}$ पौं० देणें पडतें, तर सर्व किती द्यावें लागेल?

उत्तर. ३०३३पौं० ३शि० ९$\frac{१}{२}$पे०$\frac{२}{५}$

२४७. कोणी सावकाराचें दिवाळें निघाल्यावर, त्याचे कर्जदारांस देण्याचें जें त्यास सामर्थ्य असतें, तें दाखवायासाठीं, विशेषेंकरून दर रुपयास किती आणे सामर्थ्य आहे असें ह्मणतात. जसें कोणी सावकाराचें

---

*जर एक सावकार दुसऱ्ये सावकारासाठीं माल विकत घेतो, किंवा विकून देतो, तर त्यास कांहीं नेमलेलें द्रव्य द्यावें लागतें, त्यास दलाली ह्मणतात, आणि ही दलाली सर्व रकमांविषयीं बहुतकरून दर शेंकड्यास नेमलेली असती.

तर तो दर रुपयास ८ आणे देतो असें ह्मणतात. (२४६) कलमाप्रमाणें याविषयींची रीति सोईनें निघेल. उदाहरण ८२रू० यांतून ५०रू० हे १रुपयाचे $\frac{५०}{८२}$रू० आहेत, अथवा दर रुपयास $\frac{५०\times१६}{८२}$आणे, अथवा ९आ० ९पै $\frac{३}{४१}$ आहेत.

२४८. कांहीं पैक्याचे उपयोगासाठीं जो पैका द्यावा लागतो, त्यास **व्याज** ह्मणतात, आणि त्याचा दर नेहेमी १०० वर असतो. दरवर्षास किंवा, सहा महिन्यांस, किंवा तीन महिन्यांस, किंवा दुसरे कांहीं मुदतीप्रमाणें व्याज भरावें लागतें; परंतु दरशेंकड्यास ४ असें नुसतें ह्मटलें, तर तो दर एक वर्षाचा आहे; ह्मणजे १०० रुपयांचे उपभोगासाठीं प्रतिवर्षीं ४रुपये द्यावे लागतील.

जी रकम कर्जी देतात, तीस **मुद्दल** ह्मणतात, आणि तिजवर व्याज दोन जातींचें असतें. कराराप्रमाणें जा वेळेस व्याज द्यावयाचें आहे, तें तत्क्षणीं जर कर्ज घेणारा भरतो, तर प्रतिवर्षीं त्यास तितकें भरावें लागेल हें स्पष्ट आहे; आणि जें व्याज त्यास कांहीं वर्षांनंतर भरावें लागेल तें, एक वर्षाचे व्याजास तितक्ये वर्षांचे संख्येनें गुणिलें असतां निघेल. परंतु जर तो एकदांच व्याज चुकवून देत नाहीं, आणि मुद्दल परत देईपावेतों आपल्या जवळ ठेवितो, तर कर्ज देणाराचा पैका त्याचे हातीं प्रतिवर्षीं अधिक होत जाईल, आणि असा करार झाला, तर त्याचे देण्याचे समयावर जितका अधिक वेळ गेला, तर त्याचे प्रत्येक वर्षाचे व्याजाचें व्याज द्यावें लागेल. वरचे पहिल्ये पक्षांतल्ये व्याजास **सरळ** व्याज ह्मणतात, आणि दुसऱ्ये पक्षाचे व्याजास **चक्रवाढ** व्याज ह्मणतात. व्याज आणि मुद्दल मिळून रकमेस **एकंदर रास** ह्मणतात.

२४९. दर शेंकड्यास ४$\frac{१}{२}$ प्रमाणें ६$\frac{१}{३}$ वर्षांत १०४९रू० १२आ० ३पै यांचें सरळ व्याज किती होईल? सांगितल्या रकमेचें एक वर्षाचें व्याज ६$\frac{१}{३}$वेळां बरोबर सगळें व्याज आहे; ह्मणजे ती रकम ४$\frac{१}{२}$ यांणीं गुणून, तो गुणाकार १०० यांणीं भागून एक वर्षाचें व्याज कळेल. कृति याप्रमाणें आहे;

(२३०) प्रमाणें (अ) | १०४९ . १२ . ३

अ×४	४१९९ . १ . ०
अ×$\frac{1}{2}$	५२४ . १४ . १$\frac{1}{2}$

(८२) प्रमाणें. १००)४७,२३..१५..१$\frac{1}{2}$(४७रू० ३आ० ९पै $\frac{९७}{१००}$

१६

३,८३*

१२

९,९७*

(ब) रू० ४७..३..९$\frac{९७}{१००}$ हें एक वर्षाचें व्याज आहे.

ब×६	२८३.. ६..११$\frac{५२}{१००}$
ब×$\frac{1}{3}$	१५..११..११$\frac{३२}{१००}$
रू०	२९९.. २..१०$\frac{८४}{१००}$ हें ६$\frac{1}{3}$ वर्षांचें व्याज आहे.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

दर शेंकड्यास ३ प्रमाणें १९ वर्षें आणि ७ आठवडे यांचें १०५ रू० ६ आ० २ पै यांचें व्याज काय होईल; यांत एक वर्षाचे ५२ आठवडे आहेत असें मानावें?

उत्तर. ६० रू० ७ आ० ११ पै. जवळ जवळ.

दर शेंकड्यास ३ प्रमाणें ७ वर्षांचें, आणि दर शेंकड्यास २$\frac{1}{2}$ प्रमाणें ८ वर्षांचें ५० पौं० १९ शि० यांचे व्याजांत किती अंतर आहे?

उत्तर. १० शि० २$\frac{1}{2}$ पे०

दर शेंकड्यास ५ प्रमाणें १ वर्षांत १५७ पौं० १७ शि० ६ पे० यांचें व्याज काय आहे?

उत्तर. ७ पौं० . . १७ शि० . . १०$\frac{1}{2}$ पे०

दर शेंकड्यास ४ प्रमाणें ९ वर्षांत, आणि दर शेंकड्यास ९ प्रमाणें ४ वर्षांत कोणत्येहि मुदलाचें व्याज एकच आहे हें दाखीव?

* एथें भाड्यांतील १५ आ० घेतले आहेत.

* एथें भाड्यांतील १ पै घेतली आहे.

वर्षाचे शेवटीं मुद्दल आणि व्याज मिळून, एकंदर रकम काढिली पाहिजे. कां कीं या पक्षांत (२४८) प्रमाणें पहिल्ये वर्षाचे शेवटीं, मुद्दल आणि व्याज मिळून एकंदर रकमेवर, दुसऱ्ये वर्षांत व्याज चालू होतें. उदाहरण, दरशेंकड्यास ५ प्रमाणें चक्रवाढ व्याजानें १०० रुपयांचें व्याज काढायाचें आहे, असें मनांत आण. कृति पुढीलप्रमाणें आहे;

		रु०
	पहिलें मुद्दल	१००
	पहिल्ये वर्षाचें व्याज	५
	पहिल्ये वर्षाची एकंदर रकम .	१०५
(२४९) प्रमाणें	१०५रु० चें व्याज दुसऱ्ये वर्षाचें	५..४
	दुसऱ्ये वर्षाचे शेवटीं एकंदर रकम	११०..४
	तिसरे वर्षाचें व्याज	५..८..२ ३/५
	तिसऱ्ये वर्षाचे शेवटीं एकंदर रकम	११५..१२..२ ३/५
	पहिलें मुद्दल	१००..०..०
	तीन वर्षांचे व्याजाची प्राप्ती रु०	१५..१२..२ ३/५

वर्षें पुष्कळ असतील, आणि रकम मोठी असेल, तर असें करण्याची रीति फार श्रमाची आहे; यामुळें व्याजाचे अनेक दरांवरून अनेक वर्षांची एक रुपयाची एकंदर रकम दाखविण्यासाठीं कोष्टक केलेले असतात. वर सांगीतल्ये उदाहरणाविषयीं असें कोष्टक कामांत आणण्याचें असतील, तर जा ओळीचे वरल्ये आंगास **दर शेंकड्यास ५** असें मांडिलें असेल तें पहा; आणि जा कोष्टकाचे वरल्ये आंगास वर्षांची संख्या असें मांडिलें असेल, त्या ओळींत ३ या संख्येचे समोर १·१५७६२५ हे दिसतील; ह्मणजे त्यांचा अर्थ हाच, कीं ३ वर्षांत त्या दराप्रमाणें १ रु० याची एकंदर रास १·१५७६२५ रु० इतकी होती. आतां १०० हे त्याचे शंभरपट आहेत; आणि (१४१) प्रमाणें १·१५७६२५×१००=११५·७६२५ आहेत; परंतु (२२१) प्रमाणें हे ११५रु० १२आ० २पै आहेत; यामुळें १०० रुपयांची एकंदर रास वरप्रमाणें ११५रु० १२आ० २पै० आहे.

२५१. सरळ व्याजानें दरशेंकड्यास ५ प्रमाणें ४ वर्षांपावेतों, कांहींएक मुद्दल राहिलें आहे, आणि त्यासमयीं व्याजसुद्धां रकम ३५०रु० झाली असें मनांत आण; तर आरंभीं मुद्दल काय होतें, हें जाणायाची, इच्छा आहे. जें कांहीं आरंभीं मुद्दल होतें, तें शंभर भागांत विभागून त्यांतील व्याजाकरितां ५ भाग ४ वर्षांपावेतों प्रत्येक वर्षांत मिळविले असावे; ह्मणजे मूळचे मुद्दलांत असे २० भाग मिळविल्यानें ३५०रु० ही रकम झाली असावी. यामुळें, जर ३५०रु० यांस १२० भागांत विभागिलें, तर त्यांतील १०० भाग इच्छिलेलें मुद्दल आहे, आणि बाकीचे २० भाग व्याज आहे; ह्मणजे $\frac{३५०\times१००}{१२०}$रु० अथवा २९१रु० १०आ० ८पै० हें इच्छिलें मुद्दल आहे.

२५२. मनांत आण, कीं ४ वर्षांनंतर अनें, बला ३५०रु० देण्याचे कबूल केले होते, आणि नंतर परस्परांचा असा करार झाला कीं तें कर्ज सद्यः द्यावें; आणि सरळ व्याजानें दरशेंकड्यास ५ प्रमाणें व्याज मिळतें; यावरून ३५०रु० ही सगळी रकम अनें देऊं नये, दिली असतां, अला ४ वर्षांचे व्याजाचा तोटा होईल, आणि बला तितका नफा होईल. यामुळें, अ याणें बला व्याजासुद्धां जी ४ वर्षांत ३५०रु० एकंदर रकम होईल, इतकें मात्र सद्यः देणें द्यावें. यामुळें पैका वेळेचे पूर्वीं चुकवून देण्यासाठीं कर्जांतून ५८रु० ५आ० ४पै कमी केले पाहिजेत. या रकमेस **कटमुद्दत** ह्मणतात; आणि दर शेंकड्यास कटमितीचा भाव ५ असला तर ३५० रु० चार वर्षांनंतर देण्याचे, त्यांची **सांप्रत किंमत** २९१रु० १०आ० ८पै आहे असें ह्मणतात. पैक्याचे कोणत्येहि रकमेची सांप्रत किंमत काढण्याची रीति (२५१) वरून या पुढीलप्रमाणें आहे; सांगीतली रकम १०० यांणीं गुणून आणि तो गुणाकार, १००, आणि कटमुदतीचा दर आणि वर्षे यांचा गुणाकार या दोहोंचा बेरीजेनें भाग. जर कर्जाचे मुदतींत, वर्षें आणि महिने, अथवा केवळ महिनेच असतील, तर महिन्यांस वर्षांचें अपूर्णांकरूप दिलें पाहिजे.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

दरशेंकड्यास कटमुदतीचा भाव ४$\frac{१}{२}$ आहे, तर दोन वर्षांचे मुदतीचे १३८रु० १४आ० ४पै० अशो हुंडीची कटमुदत काय होईल?

उत्तर, ११रु० ७आ० ६पै०

उत्तर. १०१६पौं० १२शि०

२५३. अनें गुणायाचें असतां, अ+ब किंवा अ—ब यांणीं गुणिलें, तर गुणाकाराचे $\frac{ब}{अ+ब}$, अथवा $\frac{ब}{अ-ब}$ या अपूर्णांका इतकी चूक पडेल; कां कीं पहिल्येपक्षांत उत्तर अधिक येईल, आणि दुसऱ्येपक्षीं कमी येईल. पुनः अनें भागावयाचें असतां जर अ+ब यांणीं भागिलें, तर भागाकाराचे $\frac{ब}{अ}$ या अपूर्णांकाइतकें उत्तर कमी येईल; आणि जर अनें भागण्याबद्दल अ—ब याणें भागिलें, तर भागाकाराचे $\frac{ब}{अ}$ या अपूर्णांकाइतकें उत्तर अधिक येईल. जसे, १७ यांणीं भागण्याचे बद्दल २० यांणीं भागिलें, तर भागाकाराचे $\frac{३}{१७}$ इतकें उत्तर कमी येईल; आणि जर ३६५ यांणीं भागण्याचे बद्दल ३६० यांणीं भागिलें, तर भागाकाराचे $\frac{५}{३६५}$, अथवा $\frac{१}{७३}$ इतकें उत्तर अधिक येईल.

वर्षाचे कांहीं भागाचे कांहीं रकमेचें व्याज काढायाची इच्छा असेल, आणि जर कोष्टकाचें सहाय्य नसेल, तर वर्षांत ३६० इतकेच दिवस आहेत, अशी कल्पना सोईस पडेल, ह्मणजे अशे पक्षांत ३६० यांस ३६५ चे जागीं घेण्यासाठीं, उत्तरांतून ३६० दिवसांचा ७३ वा भाग किंवा बहुत करून ७२ वा भाग वजा केला पाहिजे. ३६० या संख्येस इतके भाजक आहेत, कीं (२३०) प्रमाणेंबराबरदीची रीति नेहमी सहज लावितां येईल. जसें, दरवर्षास व्याज १८रू० ९आ० १०पै, अथवा १८·६१४५रू० पडतात, तर २७४ दिवसांचा भाग काय होईल ?

	एक वर्षाचें व्याज	१८·६१४५रू०
सांगितले दिवस २७४		
	१८० हे ३६० चें अर्ध आहे.	९·३०७२
	९४	
	९० हे १८० चें अर्ध आहे.	४·६५३६
	४ हे ३६० चा $\frac{१}{९०}$ आहे.	·२०६८
		९) १४·१६७६
		८) १·५७४१
		·१९६७

उत्तर. १३·९७०९रु० = १३रु० १५आ० ६पै.

परंतु जर उत्तर अगदि जवळ पाहिजे, तर सांगितल्ये दिवसांचे दोन दशांश हे गुणक करावे आणि ७३ भाजक करावे ही रीति बरी; कां कीं म÷३६५ हे २म÷७३०, किंवां $\frac{२}{१०}$म÷७३. असें, वरचे उदाहरणांत, ५४·८ यांणीं गुणितात आणि ७३ नीं भागितात; आणि ५४·८×१८·६१४५=१०२०·०७४६, यांस ७३ यांणीं भागून १३·९७३६ होतात, हे वरचांचे जवळजवळ आहेत, ह्मणजे त्यांपासून १३रु० १५आ० ७पै होतात, हे खरे होण्यास एक पै पावेतों जवळ जवळ येतात.

२५४. तीन मनुष्यांस १००रु० विभागून द्यावयाचे आहेत, असे कीं त्यांचे वांटे ६,५,९ या प्रमाणांत होतील; ह्मणजे पहिल्ये पुरूषाचे प्रत्येक ६रु० चे भागाविषयीं दुसऱ्यास ५रु० आणि तिसऱ्यास ९रु० मिळतील. १००रु० यांस जर ६+५+९ किंवा २० भागांत विभागिले, तर त्या भागांतून ६ भाग पहिल्या पुरूषास, ५ दुसऱ्यास, आणि ९ तिसऱ्यास असे वांटे केले पाहिजेत हें स्पष्ट आहे. यामुळें (२४५) प्रमाणें यांचे वेगळाले वांटे पुढीलप्रमाणें आहेत, $\frac{100\times6}{20}$रु०, $\frac{100\times5}{20}$रु०, आणि $\frac{100\times9}{20}$रु०, अथवा ३०रु०, २५रु०, आणि ४५रु० आहेत.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

चार पुरूषांस ३९४रु० १२आ० विभागून दे, असे कीं त्यांचे वांटे १,६,७ आणि १८ या प्रमाणांत होतील.

उत्तर. १२रु० ५आ० ४$\frac{१}{२}$पै, ७४रु० ०आ० ३पै, ८६रु० ५आ० ७$\frac{१}{२}$पै, २२२रु० ०आ० ९पै.

सहा पुरूषांस २०पौं० विभागून दे, अशा प्रमाणानें कीं प्रत्येकाचा वांटा त्याचे पूर्वींचे सर्व पुरूषांचे वाट्यांचे बेरिजे बरोबर होईल.

उत्तर, पहिल्ये दोन पुरूषांतून प्रत्येकाचा वांटा १२शि० ६पे० होईल; तिसऱ्याचा वांटा १पौं० ५शि०; चवथ्याचा वांटा २पौं० १०शि०; पांचव्याचा ५पौं०; आणि सहाव्याचा १०पौं० असे वांटे होतील.

२५५. दोन किंवा अनेक पुरूष सर्कती असून जर कांहीं मैक्याचा

तर त्यांचे एकंदर रकमेपासून कांही प्राप्ती, किंवा तोटा आला असतां, तो सर्वांस सारिखाच वांटून द्यावा हें योग्य नाहीं. उदाहरण, मनांत आण, कीं बचे दुप्पट अपैका भरितो, आणि त्यांचे एकंदर जमेपासून १५रु० नफा होतो, तर अ ला ब पेक्षां दुप्पट नफा असावा; ह्मणजे जर सगळी प्राप्ती तीन भागांत विभागिली, तर त्यांतून दोन भाग अ ला आणि एक भाग बला असावा, अथवा अचा नफा १०रु० आणि बचा नफा ५रु० होईल. मनांत आण कीं, अ, ब, आणि क हे तीन पुरुष कांहीं उदिमांत सर्कती आहेत, आणि अ २५०रु०, ब१३०रु०, आणि क ४५रु०, अशा वेगळाल्या रकमा भरितात. त्यांचे एकंदर जमेपासून १०००रु०, प्राप्ती होत्ये. तर ही प्राप्ती त्या तीन पुरुषांस कशे प्रमाणानें वांटून द्यावी? त्यावरून एक मनुष्यास १रु० वर जितका नफा मिळतो, तितकाच नफा दुसऱ्यास १रु० वर मिळाला पाहिजे. आतां, जापेक्षां सर्कतींची एकंदर बेरीज २५०+१३०+४५, अथवा ४२५रु० आहे, आणि त्यांपासून १०००रु० प्राप्ती झाली आहे, तर प्रत्येक रुपयावरची प्राप्ती $\frac{१०००}{४२५}$रु०होईल. यामुळें अ चा नफा $\frac{१०००\times२५०}{४२५}$रुपये, ब चा नफा $\frac{१०००\times१३०}{४२५}$रु०, आणि क चा नफा $\frac{१०००\times४५}{४२५}$रु०, अशी वांटणी होईल. या मूळ कारणावरून, (२४५) कलमाचे कृतीप्रमाणें, या पुढील प्रश्नाचें उत्तर निघेल.

एका जहाजाचा विमा करावयाचा आहे, त्या जहाजांत अ चा भाग १९२८रु० आहे, आणि ब चा भाग ४९६३रु० आहे. विम्याविषयीं ४७४रु० १०आ० २पै, देण्याचे आहेत. तर त्या प्रत्येकास विम्याविषयीं काय भाग द्यावा लागेल?

उत्तर. अला १३२ रु० १२ आ० ८ पै० द्यावे लागतील.

अ, ब, आणि क अशा तीन पुरुषांनीं १४९ पौं० चा तोटा भरायाचा आहे. जर प्राप्ती झाली असती, तर बचे प्राप्तीचे चौपटी बरोबर अची प्राप्ती असती, आणि अ आणि ब या दोघांचे प्राप्ती बरोबर कची प्राप्ती आहे. यावरून प्रत्येकानें कशा प्रमाणानें तोटा वांटून घ्यावा?

उत्तर. अनें ५९ पौं० १२ शि०, बनें १४ पौं० १८ शि०, कनें ७४ पौं० १० शि० याप्रमाणें तोटा भरावा.

२५६. कित्येक वेगळाले पुरुष आपआपल्या रकमा अनेक वेगळाले

हील, तितका तिजवर अधिक नफा किंवा तोटा असावा. उदाहरण, अ आणि ब असे दोन पुरुष जर एकच कामाकरितां सारिखेंच मुद्दल भरतात, परंतु अ चा पैका बचे पैक्याचे दुप्पट मुदत पर्यंत कामांत राहिला, तर अचा नफा बचे नफ्याचे दुप्पट असावा. याचें मूळ कारण हेंच आहे, कीं १ रु० एक महिना, किंवा एक वर्ष पर्यंत कामांत आणला असतां, प्रत्येकास प्राप्ती बरोबर व्हावी. उदाहरण, मनांत आण कीं, अ ६ महिनेंपर्यंत ३ रु० सरकतींत ठेवितो, ब ७ महिनें पर्यंत ४ रु० ठेवितो, आणि क २ महिनें पर्यंत १२ रु० ठेवितो, नंतर त्यांस १०० रु० प्राप्ती होत्ये; तर प्रत्येकास त्यांतून काय काय मिळावें? आतां जापेक्षां अ सहा महिनें पावेतों ३ रु० सरकतींत ठेवितो, ह्मणून केवळ १ महिना ठेविल्यानें जें मिळणार, त्याचे सहा पट प्राप्ती असावी; ह्मणजे ६×३ रु०, अथवा १८ रु० केवळ एक महिना ठेविल्या इतकीच प्राप्ती मिळेल; पुन: बला ४×७ रु०, अथवा २८ रु० केवळ एक महिना ठेविल्या इतकीच प्राप्ती मिळेल; आणि कला १२×२ रु०, अथवा २४ केवळ एक महिना ठेविल्या, इतकीच प्राप्ती मिळेल. यामुळें १०० रु० यांस जर ६×३+४×७+१२×२, अथवा ७० भागांत विभागिले, तर त्या भागांतून अला, ६×३, अथवा १८, बला ४×७, अथवा २८, आणि कला १२×२ अथवा २४ असे भाग असावे. यावरून त्या तीन पुरुषांचा वांटण्या या पुढीलप्रमाणें आहेत, $\frac{६\times3\times१००}{६\times3+४\times७+१२\times२}$ रु०, $\frac{४\times७\times१००}{६\times3+४\times७+१२\times२}$ रु०, आणि $\frac{१२\times२\times१००}{६\times3+४\times७+१२\times२}$ रु०.

अभ्यासाकरितां उदाहरणें.

अ, ब, आणि क हे तीन पुरुष सर्कती आहेत; त्यांत २ वर्षें अ ३ रु० ६ आ० ठेवितो, एक वर्ष ब १०० रु० ठेवितो, आणि क $१\frac{१}{२}$ वर्षपर्यंत १२ रु० ठेवितो. त्यांचे एकंदर जमेवर ४२७६ रु० ७ आ० प्राप्ती होत्ये, ही तिघांस कशी वांटून द्यावी?

उत्तर. अला २३१ रु० ६ आ० ३ पै; बला ३४२८ रु० ० आ० ० पै;
कला ६१७ रु० ० आ० ८ पै.

राहातो, आणि ब राहाण्याचे समयांत क ४$\frac{1}{2}$ महिनें रहातो. तर भाड्याविषयीं प्रत्येकानें काय काय द्यावें?*

उत्तर. अचा भाग १९० पौं० १२ शि० ६ पे०, बचा भाग ९० पौं० १२ शि० ६ पे०, आणि कचा १८ पौं० १५ शि० याप्रमाणें द्यावे.

२५७. व्यवहारास गणित लावण्याचा जा रिती या भागांत सांगीतल्या त्याच मुख्य आहेत. दुसऱ्या रिती आहेत खऱ्या, परंतु वर सांगीतलेलीं मूळ कारणें मनांत पक्की ठेविलीं, तर त्या रिती वर सांगीतल्या रितीं मध्यें येतात असें स्पष्ट दिसेल. तशाच तऱ्हेचा हुंडणावळीचा रिती आहेत, त्या या पुढील सारिख्ये प्रश्नास लागू होतात; जर, २० शि० ची किंमत या देशांत १०$\frac{1}{2}$ रु० असेल, तर १६० पौं० ची किंमत किती होईल? स्पष्ट आहे, कीं हें त्रिराशीचे रितीपासून कळेल. व्यवहार कामांत वर सांगीतल्या रिती बहुतकरून फार उपयोगी पडतात; आणि त्या शिकणारास पक्क्या समजल्या, तर त्यांचा योगानें व्यवहारांतील बहुतकरून कोणताहि प्रश्न त्यापुढें आला असतां, त्याचे समजुतीचे बाहेर राहील असें त्याणें भय धरूं नये. परंतु पुढें जो धंदा रोजगार त्यास करावा लागेल, त्याजविषयींचा योग्य रिती, त्यास त्याचे त्याचे वेगळाल्या विशेष कामांचा बरोबरच या पुस्तकांत किंवा दुसऱ्ये कोणत्येहि पुस्तकांत मिळतील असा भरंवसा शिकणारानें धरूं नये. वाणी, सावकार, किराणेवाला, कापडकरी, कुळंबी, आणि दलाल, या सर्वांचे सोईविषयीं एकच तऱ्हेचा रिती आहेत असें नाहीं; परंतु या पुस्तकांत जीं **मूळ कारणें** सांगीतलीं आहेत, त्यांशीं जो पुरुष पक्का माहित होईल, तो आपल्ये पुढील गरजेविषयीं विचार करून कसें करावें याविषयीं सामर्थ्यवान होईल, अथवा, जा तऱ्हेनें, त्याचे पूर्वजांनी आपल्या अडचणी दूर केल्या त्यांचा रिती शिकणाराचे मनांत खरें येतील.

---

* पहिल्यानें पाहिलें असतां हें उदाहरण या रितीचें नाहीं. हें उदाहरण करण्याविषयींची योग्य कृति जी पहिल्यानें नजरेस येईल ती खोटी आहे, असें कांहीं विचार केल्यानें दिसून येईल.

पहिला भाग.

गणन करण्याचे रितीविषयीं.

या पुस्तकांत जा रिती मागें सांगितल्या, त्या व्यवहार चालीप्रमाणें आहेत, आणि जीं उदाहरणें सांगितलीं, तीं चालीप्रमाणें केलेलीं आहेत. परंतु त्वरित गणित करितां यावें अशी शिकणाराची इच्छा असेल, त्याणें या पुरवणींत जा रिती सांगितल्या आहेत, त्याप्रमाणें खचित् चालावें; ह्मणजे तेणेंकरून त्यास श्रम कमी पडतील इतकेंच नाहीं, परंतु त्यास त्वरेनें आणि खरेपणानें गणन करण्याची संवई होईल.

पहिल्यानें. अंकसंख्या लेखनवाचन क्रमांत मूळचा दशक संख्या, जसें, १०,१००,१०००, इत्यादि आहेत, त्यांतून प्रत्येकीस एक या अंकाचे स्थानावरून लक्षांत आणूं नको, परंतु त्यावर जितकीं शून्यें येतात त्यांवरून तो अंक लक्षांत ठेव. जसें दहा ही **एक शून्याची** संख्या, शंभर ही **दोन शून्यांची** संख्या, दशलक्ष ही **सहा शून्यांची** संख्या, इत्यादि आहे असें ह्मण. कोणत्येहि संख्येचे उजव्येकडून **पांच** अंकस्थळें वेगळीं केलीं, तर बाकी राहिलेले अंक लक्षांचे आहेत; कां कीं १००००० ही **पांच** शून्यांची संख्या आहे. दशक, शतक, सहस्र, दशसहस्र, लक्ष, कोटी, इत्यादिकांस १,२,३,४,५,६, इत्यादि शून्यांवरून ध्यानांत धरायास शीक. **सत्रा शून्यांची** संख्या काय आहे? सत्रांमध्यें प्रत्येक सहा स्थळांस **दशलक्ष** ह्मण, आणि बाकी राहिल्ये पांचांस **लक्ष** ह्मण; ह्मणजे ती संख्या लक्षाचे दशलक्षाचे दशलक्ष आहे हें उत्तर आहे, अथवा परार्ध इतकी संख्या आहे. कोणत्याहि संख्येचे उजव्येकडून बारा अंकस्थळें वेगळीं केलीं, तर बाकी राहिलेली संख्या काय आहे? उत्तर बाकी राहिलेल्ये संख्येमध्यें जितके एक आहेत, तितके त्या संख्येंत दशलक्षांचे दशलक्ष, अथवा दशखर्व इतकी संख्या आहे.

दुसऱ्यानें. १,२,३,४ इत्यादि, अथवा ३०,२९,२८,२७, इत्यादि

असे उलटसुलट रितीने जलद [illegible]
तीन, इत्यादि ९ पावेतों अंक सोडीत सोडीत कोणत्येहि अंकापासून प्रारंभ करून मोजायास शिकावें. जसें, ४ या अंकापासून आरंभ करून ७ चें अंतर ठेऊन ४,११,१८,२५,३२, इत्यादि याप्रमाणें मोजायास शिकावें, आणि १,२,३,४, इत्यादि हे जसे जलद बोलतां येतात, तसे वरचे अंक जलद बोलतां यावे; ह्मणजे, त्या अंकांचा उच्चार करण्यांत कांहीं वेळ जाऊं देऊं नये. मिळवणीची कृति कांहीं सहाय्यावांचून मनांत करण्याची संवई असावी; ४ आणि ७ मिळून ११ आहेत, ११ आणि ७ मिळून १८ आहेत, इत्यादि असें ह्मणूं नये; परंतु ४,११,१८ असें ह्मणावें. आणि पुढें जितकें सहज मोजतां येतें तितकें मागेंहि सहज मोजतां यावें, याची बहुतकरून जरीं गरज नाहीं तथापि तसें मोजतां यावें, हें बरें आहे; ह्मणजे ६० या अंकापासून ७ अंतरानें उलटें ६०,५३,४६,३९ इत्यादि मोजावें.

तिसऱ्यानें. एक अंकस्थळाचा दोन संख्या पहातांच, त्यांतून लहान संख्या मोठीचे बरोबर करायास तिशीं कोणता अंक मिळविला पाहिजे हें शोधून काढायास शिकावें. **८ तून ३ जाऊन ५ राहिले** असें न ह्मणतां, ३आणि ८हे अंक पहातांच त्यांचें अंतर ५ आहे असें अभ्यासानें मनांत यावें. आणि त्या दोन संख्यांतून दुसरी लहान असेल, तर ८ पासून **पुढल्ये** जा संख्येचे शेवटीं ३ येतात, ती संख्या काढण्याचा अभ्यास ठेवावा, ह्मणजे ती संख्या १३ आहे, आणि १३ तून ८ वजा करून बाकी ५ पांच रहातात असें न ह्मणतां, ८ यांस जे ५ मिळवावे लागतात त्यांवर लक्ष पोंचावें. अंकांची एक ओळ घे, जसें,

४ २ ६ ० ५ ० १ ८ ६ ४

यांतून कोणताहि एक अंक आणि त्याचे जवळचा दुसरा अंक घेऊन, त्यांजवर वरची रीति लावावी, परंतु या सोपे उदाहरणांत मोठे अंक बोलून दाखविण्याची गरज नाहीं. जसें, पहिला अंक ४ आणि दुसरा अंक २ असे घेतले, तर ४ चे पुढें जा अंकाचे शेवटीं २ येतात तो अंक १२ आहे, त्यांत ४ वजा केले तर ८ बाकी रहातात, याप्रमाणें ४ आणि ८,२ आणि ४,६ आणि ४,० आणि ५,५ आणि ५,० आणि १,१ आणि ७,८ आणि ८,६ आणि ८, अशी कृति करावी.

चवथ्यानें. दोन स्थळांची एक संख्या आणि एक स्थळाची एक

२७ आणि ६ यास पहातांच, २७ पासून पुढें जो अंकाचे शेवटीं ६ यतात, ह्मणजे ३६ पावेतों पुढें चालावें, जा ९ संख्यांतून पुढें जावें लागतें तो अंक मनांत धरून, २७ आणि ९ हे ३६ आहेत इतकें मात्र ह्मणावें. जसें, १७७२९६३८१०९ या अंकांचे ओळीपासून अभ्यासाकरितां हीं उदाहरणें निघतात; १७ आणि ० हे १७ आहेत; ७७ आणि ५ हे ८२ आहेत; ७२ आणि ७ हे ७९ आहेत; २९ आणि७ हे ३६; ९६ आणि ७ हे १०३; ६३ आणि ५ हे ६८; ३८ आणि ३ हे ४१; ८१ आणि ९ हे ९०; १० आणि ९ हे १९ आहेत.

पांचव्यानें. दोन अंक स्थळांचे संख्यांतून, एकंचा अंक मांडून दहंचा अंक ध्यानांत धरण्याची संवई करावी. जसें वरचे उदाहरणांत, उत्तरांतील एकंचा अंक मांडतेसमयीं दहंचा अंक मोज्यानीं ह्मणून लक्षांत ठेवावा.

सहाव्यानें. गुणाकार कोष्टक असा पाठ करावा कीं दोन अंक पहातांच त्यांचा गुणाकार मनांत यावा; ह्मणजे, ८ आणि ७, अथवा ७ आणि ८, हे अंक पाहिले असतां ७ वेळा ८ हे ५६ होतात, असें न ह्मणतां ५६ मनांत यावे. जसें, २९७०६५४८ या अंकांचे ओळीकडे पाहून, प्रत्येक जवळ जवळचे अंकांचा गुणाकार, ते अंक वाचतांच करण्याची संवई करावी, जसें, २७,६३,०,०,३०,२०,३२.

सातव्यानें. वरचीं उदाहरणें शिकल्यानंतर, तीन अंक पहातांच, कांहीं तोंडानें कृति न करितां, त्यांतून पहिल्ये दोहोंचा गुणाकारास तिसरा अंक मिळवण्याची संवई करावी. जसें, ३,८,४, हे अंक पाहिले असतां, ३ वेळा ८ हे २४, आणि ४ मिळून २८ होतात, असें न ह्मणतां ३वेळा ८आणि ४, अथवा २८ होतात, असें सांगतां येई असा अभ्यास करावा. जसें, १७९२३६४०८ यांपासून हीं पुढील उदाहरणें निघतात, १६,६५,२१,१२,२२,२४,८.

आठव्यानें. आतां वरचीं कृति या पुढीलप्रमाणें अधिक कर; २,७, ६, ९, असे ४ अंक पहातांच, वर सांगील्याप्रमाणें, कांहीं शब्द न बोलतां, पहिल्ये दोन अंकांचे गुणाकारास तिसरा अंक मिळीव; नंतर ती सर्व रकम सांगून तीस बाकीचा चवथा अंक मिळवून बेरीज सांग, आणि सांगतेसमयीं दशकावर जोर घालून उच्चार कर. जसें, २,७,

७७३६९८९७४ या अंकांचे ओळीपासून हीं पुढील उदाहरणें निघतात, ५२ आणि ६ हे ५८; २७ आणि ९ हे ३६; २७ आणि ८ हे ३५; ६२ आणि ९ हे ७१; ८१ आणि ७ हे ८८; ७९ आणि ४ हे ८३ आहेत.

नवव्यानें. २,४,७,९, असे चार अंक पहातांच, मागील उदाहरणांत या पुढीलप्रमाणें फेरफार करावा; पहिला आणि दुसरा यांचा गुणाकार तिसऱ्यानें वाढवून तो मनांत धरावा; नंतर त्यांत चवथा अंक मिळवूं नये, परंतु वजा करावा, ह्मणजे, चौथ्या कलमाचे अभ्यासाचे उदाहरणाप्रमाणें, जा अंकाचे शेवटीं चवथा येतो, तेथपावेतों पुढें चालावें. जसें, २,४,७,९, यांपासून याप्रमाणें सुचना होते, ह्मणजे, १५ आणि ४ मिळून १९ आहेत. १७२३९६८९२९ या अंकांचे ओळीपासून हीं पुढील उदाहरणें निघतात, ह्मणजे, ९ आणि ४ हे १३; १७ आणि २ हे १९; १५ आणि १ हे १६; ३३ आणि ५ हे ३८; ६२ आणि ७ हे ६९; ५७ आणि ५ हे ६२; ७४ आणि ५ हे ७९ आहेत.

दहाव्यानें. कोणताहि सांगीतला एक दोन अंकस्थळांचे संख्येंत किती वेळा जाऊन बाकी काय राहील, हें लवकरें काढायास शिकावें. जसें, ८ आणि ५३ यांस पहातांच, ६ वेळा आणि बाकी ५ असें लवकरें ह्मणावें. अशा कामांत निपूण व्हावयासाठीं सरळ लहान भागाकाराचीं उदाहरणें उपयोगी पडतात. जसें, २३६४१०७९२ यांस ७ यांणीं भागिल्यानें, अथवा

७)२३६४१०७९२
    ३३७७२९७०, बाकी २.

यांत इतकें मात्र ह्मणावें लागतें, ह्मणजे ३ आणि २;३ आणि ५; ७ आणि ५; ७ आणि २; २ आणि ६; ९ आणि ४; ७ आणि ०; ० आणि २.

वेगवेगळ्या रितींची कृति करिते समयीं या पुढीलप्रमाणें करावें;

मिळवणी. या पुढील कृतीमध्यें अंकांशिवाय तोंडानें कांहीं बोलूं नये; जा अंकावर एक चिन्ह आहे, त्यास मात्र मांडावा; जा अंकावर

ह्मणू नये.

४७९६३ ६,१५,१७,२३,३१,३″४′;११,१२,२१,२२,
१५९८
२६३१६ ३१,३″७′;९,१७,२४,२७,३२,४″१′;
५४७९२
८१९ १०,१४,२०,२१,२″८′;७,९,१′३′;
६६८६
———
१३८१७४

मिळवणीचा ताळा करायासाठीं, वरची ओळ सोडून बाकीचे ओळींची बेरीज घेऊन, ती बेरीज सोडिलेल्ये ओळीशीं मिळवावी, अशी चाल आहे; परंतु यापेक्षां प्रत्येक उभी ओळ खालून वर, वरून खालीं असें करून ताळा पहावा हें बरें.

वजाबाकी. याविषयीं ही पुढील कृति पुरेल. जे हातचे घ्यावे लागतात, तो नेहेमीं एक आहे, ह्मणून तो बोलण्याचें प्रयोजन नाहीं.

७९४३६२५८१९० यांतून.
५८६४५९६२७३८ हे वजा कर.
———
२०७९०२९५४५२

८ आणि २′, ४ आणि ५′, ७ आणि ४′, २ आणि ५′, ६ आणि ९′, १० आणि २′, ६ आणि ०′, ४ आणि ९′, ७ आणि ७′, ९ आणि ०′, ५ आणि २′. आतां ८ आणि २ हे १० होतात असें ह्मणण्याचें प्रयोजन नाहीं; कां कीं २ आले असें समजल्यावर, ते कोठून आले हें लक्षांत ठेवण्याचें प्रयोजन नाहीं.

गुणाकार. करितेसमयीं हे पुढील शब्द मात्र बोलावे लागतात; नंतर चालीप्रमाणें बेरीज घ्यावी. जा अंकांवर चिन्हें नाहींत ते हातचे घेतात.

६७०३८३
९८७६
———
४०२२२९८ १८′, ४९′, २२′, २′, ४२′, ४′०′
४६९२६८१ २१′, ५८′, २६′, २′, ४९′, ४′६′
५३६३०६४ २४′, ६६′, ३०′, ३′, ५६′, ५′३′
६०३३४४७ २७′, ७४′, ३४′, ३′, ६३′, ६′०′.
———
६६२०७०२५०८

पुरवणीचे दुसऱ्ये भागाप्रमाणें ताळा पहा.

जास वरचें आठवें कलम चांगलें माहित आहे, त्यास कृति करितानां एक गुणाकाराची ओळ तिचे वरचे ओळीस सहज मिळवितां येईल, जसें;

```
      ६७०३८३
        ९८७६
  ---------------
     ४०२२२९८   ८;२१ आणि ९ हे ३०′; ५९ आणि २ हे ६१′;
    ५०९४९१०८   २७ आणि २ हे २९′;  २ आणि २ हे  ४′;
   ५८७२५५५०८   ४९ आणि ० हे ४९′; ४६ आणि ४ हे ५′०′ आहेत.
  ६६२०७०२५०८
```

दुसरी ओळ उत्पन्न करण्याची सर्व कृति उजव्ये बाजूवर करून दाखविली आहे, आणि त्यापासून ७६ यांचा गुणाकार पुरा होतो, त्याचप्रमाणें तिसऱ्ये ओळीपासून ८७६ यांचा गुणाकार पुरा होतो, आणि चवथीपासून ९८७६ यांचा गुणाकार पुरा होतो.

भागाकार. वर सांगितलेल्ये नवव्ये कलमाचे सहाय्यानें, प्रत्येक गुणाकार आणि त्याचे पुढील वजाबाकी एकदांच या पुढीलप्रमाणें कर;

```
२७६९३)४४१९७२८०९६६२(१५९५९७३०
         १६५०४२
          २६५७७८
           १६५४१०
            २६९४५९
             २०२२२६
               ८३७५६
                 ६७७२
```

गुणक ५ असून १६५०४२ यांपासून २६५७७ हे उत्पन्न होतात; तेव्हां, १५ आणि ७′ हे २″२; ४७ आणि ७′ हे ५″४; ३५ आणि ५′ हे ४″०; ३९ आणि ६′ हे ४″५; १४ आणि २′ हे १६ इतके मात्र शब्द बोलावे लागतात.

११ व्यें भागांतील समीकरणें उलगडतेसमयीं, या संक्षेप भागाकारा-प्रमाणें कृति केली पाहिजे.

पुरवणी दुसरा भाग.

नऊ आणि अकरा टाकून ताळा पहाण्याविषयीं.

हिशोबाचा ताळा पहाण्यासाठीं, नव्ये शिकणारानें **नऊ टाकण्याचे** कृतीशीं माहित होण्यासाठीं अभ्यास केला पाहिजे. ही कृति पुरती नाहीं, कां कीं जर एक अंक कमी केला आणि तितक्यानेंच दुसरा अंक अधिक केला, तर असी दुहेरी चूक त्यापासून सांपडणार नाहीं; परंतु अशी दुहेरी चूक पडत नाहीं, यावरून ती रीति खरी आहे असा मुद्दा होतो.

या रितीचा आश्रय या पुढील प्रतीज्ञेवर आहे; अ,ब,क,ड, या चार संख्या असतील, अशा कीं,

$$अ=बक+ड,$$

आणि दुसरी एक संख्या म असेल, आणि जर अ,ब,क,ड, हे वेगळाले मनें भागून त्यांचा वेगळाल्या बाक्या, प, क, र, स, असतील तर

$$प \text{ आणि } कर+स$$

यांस मनें भागिल्यानें सारिखीच बाकी निघेल, आणि कदाचित् त्या परस्पर बरोबरहि असतील.

उदाहरण. ३३४=१७×१९+११;
या चार संख्या ७ नीं भागून, ५,३,५, आणि ४, अशा वेगळाल्या बाक्या रहातात. नंतर ५ आणि ५×३+४, अथवा ५ आणि १९ या दोहोंस ७ नीं भागून दोहोंचा बाक्या ५ होतील.

यामुळें कृतीचा खरेपणा ताडून पहाण्यासाठीं भाजकाविषयीं, कोणतीहि संख्या कामांत घ्यावी. कामास उपयोगी पडे असा ताळा प-

३,९, आणि ११ या संख्या सोईचे भाजक आहेत, आणि त्यांतून ९ बाकीचांपेक्षां अधिक उपयोगी आहे.

३ आणि ९ या दोन संख्यांनीं भागून जी बाकी निघती, ती नेहमीं त्यां संख्येचे अंक स्थळांचे बेरिजेस, याच दोन अंकांनीं भागून जी बाकी निघती, तिचे बरोबर असती. उदाहरण, २४६१२०३७७ यांस ९ नीं भागून बाकी काय राहील? या संख्येचे अंकस्थळांची बेरीज २+४+६+१+२+०+३+७+७, अथवा ३२ आहे, ह्मणजे, त्यापासून बाकी ५ रहातात. परंतु बेरीज करितेसमयीं तींतून जसे जसे ९ निघतात, तसे तसे लवकरेंनें ते टाकून द्यावे ही सोईची रीति आहे. जसें याप्रमाणें ह्मण, २,६,१२,३,४,६,९,७,१४, आणि बाकी ५. तर २४६१२०३७७ यांस ९ नीं भागिलें असतां वरप्रमाणें बाकी ५ रहातात. ताळा या पुढीलप्रमाणें होईल; स्पष्ट आहे कीं, १,१०,१००, इत्यादि या प्रत्येक संख्येस ९ नीं भागून बाकी १ राहील, कां कीं त्या संख्या १,९+१,९९+१, इत्यादि अशा आहेत. यामुळें, २,२०, २००, इत्यादि प्रत्येकीची बाकी २ आहे; ३,३०,३०० इत्यादि प्रत्येकीची बाकी ३ आहे; आणि याप्रमाणें पुढेंहि. ह्मणजे, जर १७६४ यांस ९ नीं भागिलें, तर १००० हे कित्येक बरोबर नवांचा संख्यांत एक अधिक इतके होतील, ७०० यापासून ७ अधिक होतील, आणि ६० पासून ६ अधिक होतील. तर अशानें, १,७,६,४, हे एकत्र मिळवून त्यांतून ९ टाकून जी बाकी राहील, ती १७६४ यांस नवांनीं भागून जी बाकी राहील, तिचे बरोबर आहे.

ही कृति आतां गुणाकारास लावून दाखवितों; यापूर्वीं (६६) व्ये कलमांत असें सांगितलें कीं

१०००४५६९×३१६३=३१६४४४५१७४७ आहेत.

डाव्येकडील पहिल्ये संख्येंतून नऊ टाकतांनां, याप्रमाणें मात्र ह्मटलें पाहिजे, १,५,१०,१,७; दुसऱ्यांत ३,४,१०,१,४; तिसऱ्यांत ३,४, १०,१,५,९,४,९,८,१२,३,१०,१. यावरून ७, ४, आणि १, ह्या बाक्या आहेत. आतां ७×४=२८ यांतून नऊ टाकून १ रहातो; ह्मणजे ही बाकी, आणि गुणाकाराची बाकी, सारिखीच आहे.

पुनः (८४) कलमांत, असें सांगितलें आहे, कीं

आतां १३००००, १८३, आणि ६४८४, या प्रत्येकांतून नऊ टाकिले असतां ४,३, आणि ४, अशा बाक्या रहातात. आतां ४×३+४ यांतून नऊ टाकिले, तर ७ बाकी रहातात; ह्मणजे, २३७९६४८४ यांतून नऊ टाकून बाकी ७ पूर्वीचे बरोबरच आहेत.

समीकरणाचें एके बाजूचे कृतीचें फळ, दुसऱ्ये बाजूचे फळाशीं ताडायासाठीं, समीकरणाचे एके बाजूचें फळ, स्मरणांत ठेवणें, किंवा मांडणें हे श्रम चुकविण्यासाठीं, या पुढीलप्रमाणें केलें पाहिजे; समीकरणाचा बाजूस दोन किंवा अधिक संख्या असतील, त्यांची बाकी काढून ती बाकी नवांतून वजा करून, ती बाकी समीकरणाचे दुसरे बाजूस एक संख्या आहे, त्यांत मिळीव. नंतर त्या बाजूची बाकी ० होईल. जसें, वरचे कमीकरणाचे उजव्ये बाजूंतून जी ७ बाकी निघाली, ती नवांतून वजा करून बाकी २ आहेत, ते दुसऱ्ये बाजूचे एके संख्येचे आरंभीं हातचे घेऊन, याप्रमाणें ह्मण; २,४,७,१४,५,११,२,६, १४,५,९,०. नऊ त्वरेनें टाकायास शिकणारा अभ्यासानें निपूण होईल.

नवांवरची बाकी खरी असती असें जांत घडतें, त्यांत कांहीं चूक झाली किंवा नाहीं हें नऊ टाकण्याचे कृतीनें सांपडत नाहीं. जर कांहीं कृति श्रमाची असून तिचा कांहीं अधिक ताळा पहाण्याची गरज असेल, तर नऊ टाकल्यानंतर अकरा टाकण्याची रीति उपयोगी पडेल. ही गोष्ट लक्षांत ठेविली पाहिजे, कीं १०+१,१००−१,१०००−१, इत्यादि हे सर्व अकरांनीं निःशेष भागिले जातात. तर यावरून अकरांचे भागाकारानें जी बाकी रहाती, ती काढण्यास ही पुढील रीति चालेल, आणि बीजानुरूप वजाबाकीशीं जो माहित आहे, त्याचानें ही रीति सोईनें कामांत घेतां येईल. जाला ती रीति माहित नाहीं, त्याणें अकरांनीं भागाकार करावा हें बरें.

डाव्येकडील पहिला अंक दुसऱ्ये अंकांतून वजा कर, नंतर ती बाकी तिसऱ्ये अंकांतून वजा कर, नंतर ती बाकी चवथ्ये अंकांतून वजा कर, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. शेवटील वजा बाकी धन अथवा ऋण असली, तर तिचें आणि ११ चें अंतर इच्छिलेली बाकी होईल. जसें, १६४२९१५ यांस ११ नीं भागून, बाकी काढायासाठीं याप्रमाणें होईल; ६ तून १ गेला ५ राहिले; ४ तून ५ गेले,−१ राहिला;

६ गेले,−५ राहिले; ५ तून−५ गेले, १० राहिले; आणि हे १० बाकी आहेत. परंतु १६४ यांपासून −१ येतो, आणि बाकी १० आहेत; १६४२९१ यांपासून −५ येतात आणि बाकी ६ आहे. सांगीतली संख्या जितकी त्वरेनें तोंडानें सांगतां येईल, तितकी त्वरेनें अभ्यासानें वरची वजाबाकी सांगतां येईल. जसें, १२७६१९८३३४२४ यांविषयीं केवळ याप्रमाणें ह्मणावें लागतें, १,६,०,१,८,०,३,०,४,−२,६, आणि ६ बाकी आहे.

नऊ आणि अकरा या दोहोंचे टाकण्यानें कांहीं प्रश्नांचा ताळा पाहिला असतां, त्यांत कांहीं चूक नाहीं, परंतु जर बरोबर ९९ वेळा चूक झाली असली, तर ती चूक ताळ्यानें समजणार नाहीं.

पुरवणी भाग तिसरा.

अंकसंख्या लेखनवाचन क्रमाविषयीं.

दहा, दहावेळा दहा, इत्यादि, यांचे स्थळीं १०,१०० इत्यादि येतात, अशी संवई झाली आहे, यामुळें पांचांचे स्थळीं १०, पांच वेळा पांचांचे स्थळीं १००; अथवा बारांचे स्थळीं १०, बारावेळा बारांचे स्थळीं १००, असे कां घेऊं नये याविषयीं कांहीं कारण आपल्ये मनांत येत नाहीं. अंकांचा वेगळाल्या ओळी योजून, त्या वेगळाल्या ओळींतील एकं त्याचे पूर्वींचे ओळींचे एकंमाचा समुदाय दाखवायास जरी घेतों, तरी दशकांचा समुदायांशिवाय दुसरे कोणतेहि समुदाय घेण्यास कांहीं प्रतिबंध नाहीं.

जर २ दाखविण्यासाठीं १० घेतले, ह्मणजे ओळींतील प्रत्येक एकं त्याचे उजव्येकडचे ओळीचे एकंचे दुप्पट असला, तर जें हाल्लीं १,२,३,४,५,६, इत्यादि हे दाखवितात, तें १,१०,११,१००,१०१,११०,१११,१०००,१००१,१०१०,१०११, इत्यादि यांणीं दाखविलें जाईल, यास **द्विक्रम** रीति ह्मणतात. **त्रिक्रम** रितींत १० हें ३ चे स्थळीं घेतले असतात, तर याप्रमाणें होईल. १,२,१०,११,१२,२०,२१,२२

एकूणहत्तर आहेत. **द्वादशक्रम** रितीमध्यें, १० हे बारा दाखवितात, तर दहा आणि अकरा या संख्यांविषयीं कांहीं नवीं चिन्हें योजिलीं पाहिजेत, कां कीं या नव्या पक्षांत १० आणि ११ हे १२ आणि १३ यांचे जागीं येतात; ह्मणून ट आणि इ त्यांचे जागीं घे. तर १७६ यांचा अर्थ हाच आहे कीं १ हा बारा वेळा बारा, ७ बारा, आणि ६, अथवा २३४; आणि १टइ यांचा अर्थ २७५ आहे.

जा अंकाचे स्थळीं दहा घेतात, त्यास **अंक संख्या लेखनवाचन रितीचें मूळ** ह्मणतात. एके रितीचे संख्येस कोणत्येहि दुसऱ्ये रितीचें रूप द्यावयासाठीं, पहिल्ये रितीचे अंक मांडून, त्यांस नव्ये रितीचे मूळ संख्येनें भाग; नंतर तो भागाकार त्या मूळ संख्येनें पुनः पुनः भागून, त्या वेगळाल्या बाक्या इच्छिलेले अंक आहेत. उदाहरण, दशक रितीप्रमाणें जी संख्या १७०३६ आहे, ती पंचक्रमाप्रमाणें काय आहे?

```
५)१७०३६              उत्तर, १०२११२१.
  ५)३४०७· · बाकी १
    ५)६८१· · · · · २                 पंचक्रम.              दशक्रम.
    ५)१३६· · · · · १ ताळा १०००००० याचा अर्थ १५६२५
     ५)२७· · · · · १            २०००० · · · · · · · १२५०
      ५)५· · ·   · २            १००० · · · · · · · · १२५
      ५)१· · · · · ०            १०० · · · · · · · · · २५
        ०          १            २० · · · · · · · · · १०
                                 १ · · · · · · · · · · १
                             ———————————         ————
                             १०२११२१ · · · · · · १७०३६
```

या रितीचें कारण सोपें आहे. भागाकार कृतीनें १७०३६ यांस ३४०७ इतक्या पंचभागांत भागून वर १ रहातो अशी मात्र कृति आहे; नंतर ३४०७ या पांच भागांत पांचांचे ६८१ पांच भाग येऊन वर २ **पांच भाग** रहातात नंतर पांचांचे ६८१ पांच भाग यांस पांचांचे

व्यवहारी किंवा दशक्रम रितीचे शिवाय दुसऱ्या क्रम रितीने जी संख्या दाखवितां येती, तीस गुणायाचें आणि भागायाचें हें अभ्यासाकरितां फार उपयोगी आहे. सगळ्या क्रम रितीविषयीं सर्व रिती सर्वांशी सारिख्या आहेत, ह्मणजे, जे अंक हातचे घेतात ते नेहमी त्या क्रम रितीचे मूळ अंक आहेत. जसें, पंचक्रम रितीमध्यें १० चे जागीं पांच हातचे घेतात;

उदाहरण.

पंचक्रमरी०		दशक्रमरी०
४२१४३	यांचा अर्थ	२७९८
१२३४		१९४
३२४२३२		१११९२
२३२०३४		२५१८२
१३४३४१		२७९८
४२१४३		५४२८१२
११४३२२२२२		

द्वादशक्रमरी०	दशक्रमरी०
४ट९)७६ट४इ०८(१६६८७	
४ट९	७०५)२२६१०७४४(३२०७१
२८१४	१४६०
२५४६	५०७४
२८टइ	१३९४
२५४६	६८९
३६५०	
३३२०	
३३०८	
२ट३३	
४९५	

ही पुढील दुसरी रीत आहे; डाव्येकडील पहिल्या अंक स्थळास नव्या क्रम रितीप्रमाणें जुन्ये रितीचे मूळ अंकानें गुणून, त्यां गुणाकाराशीं त्याचे उजव्येकडील जवळचा अंक मिळीव; ही बेरीज नव्ये क्रम रितीप्रमाणें जुन्ये मूळ अंकानें पुनः गुणून, त्या गुणाकाराशीं त्याचे उजव्येकडील दुसरा अंक मिळीव, याप्रमाणें शेवटपर्यंत करित जा, ह्मणजे जी क्रम रीति सोडायाची आहे, तीचा मूळ अंक कामांत घ्यावा, परंतु जा रितींत उत्तर इच्छिलें आहे त्या रितीप्रमाणें गणित करावें.

जसें, १६६८७ अशे द्वादशक्रम संख्येस दशक्रम रूप द्यावयाचें आहे, आणि १६४३२ अशे सप्तक्रम संख्येस चतुःक्रमरूप द्यावयाचें आहे; असें मनांत आण;

	१६६८७	१६४३२
	द्वादशक्रमांतून दशक्रमरूप.	सप्तक्रमांतून चतुःक्रमरूप.
	१×१२+६=१८	१×७+६=३१
	×१२+६	×७+४
	२२२	११३३
	×१२+८	×७+३
	२६७२	२२१३०
	×१२+७	×७+२
उत्तर,	३२०७१	१०२१०१२

फुटीचें माप १२ समभागांत विभागिलें आहे, यांमुळें बहुधा द्वादशक्रम रीति फारच सोईस पडती. जर एक चौरस फुटीस १२ समभागांत विभागून, प्रत्येक भाग १२ चौरस इंच आहे, आणि या १२ चा १२ वा भाग १ चौरस इंच आहे. एक काटकोन चौकोन शेत आहे, त्याची एक बाजू १७६ फुटी ९ इंच आणि एक इंचाचे ७ बारांश आहे, आणि दुसरी बाजू ६५ फुटी ११ इंच आणि एक इंचाचे ५ बारांश आहे. द्वादशक्रम रीति आणि द्वादशांश कामांत आणिले असतां, वरचा दोन संख्या या पुढीलप्रमाणें होतील, ह्मणजे, १२८·९७

संख्या होईल, आणि त्या याप्रमाणें निघतात;

१२८·९७
५५·३५
———
६१७३३
११६०९५
६१७३३
६१७३३
———
६८३८·१४४३

उत्तर, द्वादश क्रमाप्रमाणें ६८३८·१४४३ चौरस फुटी, अथवा दशांश रितीप्रमाणें ११६६० चौरस फुटी १६ चौरस इंच आणि चौरस इंचाचे $\frac{४}{१२}$ आणि $\frac{११}{१४४}$.

तथापि, इंचाचे प्रत्येक पावाविषयीं फुटीचे २ शतांश, प्रत्येक ३ इंचांविषयीं दुसरा १ शतांश आणि जर इंचाचे पावावर १२ वा अंश अथवा २ बारा वे अंश असतील, तर १ शतांश अधिक, याप्रमाणें घेतल्यानें खरेपणाचे जवळजवळ होईल. जसें, ९$\frac{७}{१२}$ इंचांविषयीं याप्रमाणें असावें, ·७६+·०३+·०१, अथवा ·८०, आणि ११$\frac{५}{१२}$ इंच हे ·९५ असावे; अशावरून वरचें उदाहरण दशांशरूपानें याप्रमाणें होईल, ह्मणजे, १७६·८×६५·९५, अथवा ११६५९·९६ चौरस फुटी आहेत, या व्यवहार कामाकरितां पुरतेपणीं खऱ्या होतील.

पुरवणी भाग चवथा.

अपूर्णांकांचे व्याख्यानाविषयीं.

पूर्वीं जें अपूर्णांकाचें व्याख्यान सांगितलें, त्यापासून कळतें, कीं $\frac{७}{९}$ हे **सातांचा नववा भाग** आहे, आणि असें दाखविलें, कीं हे आणि एकाचे **सात नवमांश** सारिखेच आहेत. परंतु अपूर्णांकाची सुचना अनेक तऱ्हेचे बोलण्यानें होती, ती सर्व न्यूनाधिकतेनें कामांत घेतात.

पहिल्यानें. $\frac{७}{९}$ हे ७ चा ९ ववा भाग.

दुसऱ्यानें. एकाचे ७ नवमांश.

तिसऱ्यानें. ७ हे ९ वांचा जो अपूर्णांक आहे तो.

चवथ्यानें. ७ यांत जितक्या वेळा ९ जातात तितक्या वेळा, अथवा एक वेळचा भाग.

सातव्यानें. ७ तांस ९ यांचें जें प्रमाण आहे त्याचा रूप भेद करितो जो गुणक तो.

आठव्यानें. ९,१ आणि ७, याचें चवथें प्रमाण तें.

वर सांगितलेल्या पहिल्ये आणि दुसरे व्याख्यानाचा अर्थ मागें सांगितला आहे. तिसरें व्याख्यान याप्रमाणें निघतें; ९ यांस ९ समभागांत विभागिलें, तर प्रत्येक भाग १ आहे, आणि त्यांतील ७ भाग ७ आहेत; यामुळें ९ चा जो अपूर्णांक ७ आहे, तो $\frac{७}{९}$ आहे. यापासून चवथें व्याख्यान खरें निघतें; कां कीं गुणाकारांत जी कृति पुनःपुनः करावी लागती, ती दाखवायासाठीं **वेळा** शब्द कामांत घेतात, आणि बोलण्याचे विस्तारानें संख्येचा कांहीं भाग, तो त्या संख्येचे **एक वेळेचा भाग** आहे असें ह्मणतां येतें. पांचव्ये व्याख्यानांत केवळ शब्दांची उलटापालट आहे; कोणत्याहि संख्येचे एकंदर रकमेचे $\frac{७}{९}$ केले, तर प्रत्येक ९ चे सात होतात, आणि नवांवर जो अपूर्णांक बाकी रहातो, तो ७ शीं संबंधी अपूर्णांक असतो. अ चे $\frac{७}{९}$ = ७ वेळा $\frac{अ}{९}$ हें समीकरण सिद्ध केल्यावर, वरची गोष्ट संपूर्ण सिद्ध करितां येईल. सहावें, सातवें, आणि आठवें, हीं व्याख्यानें प्रमाणाचे अध्यायांत दाखविलीं आहेत.

जेव्हां शिकणारा बीजगणित शिकूं लागेल, तेव्हां त्यास असें कळेल, कीं जेथें बीजगणित लागू करावें लागतें, तेथें $\frac{अ}{ब}$ असा अपूर्णांक आला असतां, त्यांत अ आणि ब हे प्रत्येक अपूर्णांक आहेत अशी कल्पना बहुतकरून केली पाहिजे. यामुळें, अशे अवघड जातीचे अपूर्णांकांचें मनन करण्याची संवई असावी हें मोठें अगत्याचें आहे,

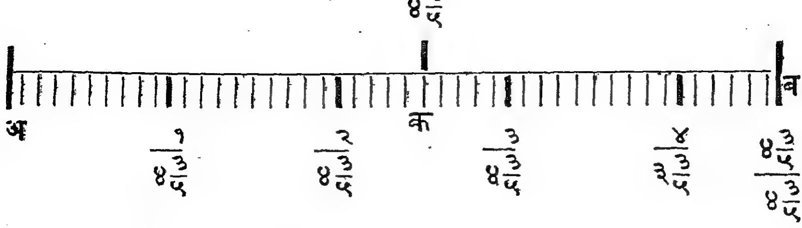
$\frac{७}{९}$ यांची कल्पना वरचे पहिल्ये आणि दुसऱ्ये व्याख्यानांवरून सहज ध्यानांत येती; परंतु $\frac{२\frac{१}{२}}{४\frac{३}{५}}$ असा अपूर्णांक घेतला, तर या पक्षांत वरचे तिसऱ्ये आणि त्याचे पुढील सर्व व्याख्यानांचे अर्थावरून त्यापेक्षां कल्पना अधिक उघड होईल. $२\frac{१}{२}$ चे $(४\frac{३}{५})$, अथवा १ एकंचे $२\frac{१}{२}$ चे $(४\frac{३}{५})$ यांविषयीं कांहीं कल्पना मनांत येत नाहीं; खरें ह्मटलें, तर को-

जाति. परंतु $२\frac{१}{२}$ हे ($४\frac{३}{५}$) चे कांहीं अपूर्णांक आहेत असें सहज मनांत येईल; ह्मणजे पहिला अपूर्णांक दुसऱ्याचे कांहीं एक वेळेचा भाग आहे; आणि कांहीं संख्येचे प्रत्येक $४\frac{३}{५}$ समभागांस $२\frac{१}{२}$ ह्यांचें रूप द्यावयासाठीं कांहीं गुणक असावा; आणि याप्रमाणें पुढेंहि. या वरचा मिश्र जातीअपूर्णांकास, पहिलें आणि दुसरें व्याख्यान लागू होईल अशी कांहीं रीति काढितां येईल कीं नाहीं हें आतां पहातों.

कांहीं लांबीचा चवथा भाग, पांचवा भाग, यांची कल्पना सहज मनांत येती, ह्मणजे, हे भाग रेघा आहेत, ज्यांचे ४ आणि ५ सांगीतल्ये लांबीचे बरोबर आहेत; आणि दुसरी एक लांबी आहे, तिची चौपट आणि तिचे $\frac{२}{५}$ सांगीतल्ये लांबीचे बरोबर होतील. उदाहरण, १४ यांस $२\frac{१}{३}$ समभागांत भागिलें असतां ६, ६, २, असे भाग होतात, ह्मणजे, त्यांत ६, ६, असे २ समभाग, आणि २ हे एक भागाचा $\frac{१}{३}$ असें ह्मणतां येईल. यावरून १४ चे ($२\frac{१}{३}$) श ६ आहेत असें ह्मणतां येईल. **अ ब** रेघेस **क**, **ड**, **इ**, इत्यादि बिंदूवर ११ समभागांत विभागिली, तर **अक**, सर्व रेघेचा ११ वा भाग आहे, **अड** ($५\frac{१}{२}$)वा, **अई** ($३\frac{२}{३}$) वा, **अफ** ($२\frac{३}{४}$) वा,

अ क ड ई फ ग ह ऐ ख ल म ब

अग ($२\frac{१}{५}$) वा, **अह** ($१\frac{५}{६}$) वा, **अऐ** ($१\frac{४}{७}$) वा, **अख** ($१\frac{३}{८}$) वा, **अल** ($१\frac{२}{९}$) वा, **अम** ($१\frac{१}{१०}$) वा, **अब** हा अब चा पहिला पूर्ण भाग आहे. जेव्हां **अब** १ आहे असें ह्मणतात, तेव्हां **अफ** $\frac{१}{२\frac{३}{४}}$ आहे, असें ह्मटलें पाहिजे, नाहीं तर, एक जातीचे अपूर्णांकास एक तऱ्हेचें व्याख्यान, आणि दुसऱ्ये जातीचे अपूर्णांकास दुसऱ्ये तऱ्हेचें व्याख्यान करावें लागेल. या तऱ्हेनें कोणत्याहि संक्षिप्त रिती घेतल्या तरीं $\frac{अ}{ब}$ या अपूर्णांकापासून अशी सुचना होती, कीं कांहीं अपूर्णांक काढायाचा आहे, जो पुनः पुनः बवेळा घेतला असतां १ होईल, आणि तो अपूर्णांक अवेळा घेण्याचा आहे असें सर्व कबूल करितील.



अशानें, $\frac{२\frac{१}{२}}{४\frac{३}{५}}$ यांस काढायासाठीं, एक एकंमास ४६ भागांत भागिल्यानें सोईस पडतें; असे १० भाग, $४\frac{३}{५}$ वेळा घेतले, तर सर्व लांबी निघेल. यावरून $\frac{४६}{१०}$ हे $(४\frac{३}{५})$ आहेत, आणि असे $२\frac{१}{२}$ भाग घेतल्यानें $\frac{२५}{४६}$, अथवा **अक** होईल. अशा रितीनें मिश्र अपूर्णांकाचें विवरण करण्याचा शिकणारानें अनेक उदाहरणांवर अभ्यास करावा.

परंतु $\frac{३\frac{१}{४}}{\frac{२}{५}}$ यांत छेद एकापेक्षां कमी आहे, तेव्हां याविषयीं काय ह्मणावें? यांत एकाचे $(\frac{२}{५})$ असावे कीं काय? असतील तर ते काय आहेत? छेदाचे स्थळीं जर नुसते ५ असते, तर असा भाग घेतला असता, कीं जो ५ वेळा घेतल्यानें १ होईल. परंतु जापेक्षां छेदाचे स्थळीं $\frac{२}{५}$ आहेत, यामुळें असा भाग घेतला पाहिजे, कीं जाचे $\frac{२}{५}$ एक एकं बरोबर होतील. तो भाग एक एकंपेक्षां अधिक आहे; ह्मणजे तो $२\frac{१}{२}$ एकं आहे; तर $२\frac{१}{२}$ चे $\frac{२}{५}$ घेतल्यानें १ होतो. यावरून वरचा मिश्र अपूर्णांक असें दाखवितो कीं $२\frac{१}{२}$ एकंमास $३\frac{१}{४}$ वेळा पुनः पुनः घेण्याचें आहे. **गुणाकार** या शब्दाचा अर्थ वेळेचा भाग घेणे असा विस्तीर्ण केला असतां, सगळे गुणाकार भागाकार आहेत, आणि सगळे भागाकार गुणाकार आहेत, आणि जे सर्व शब्द त्यांतून एकास लागतात, ते दुसऱ्याचे उत्तरावर लागू होतील.

जर $२\frac{१}{३}$ यार्डांची किंमत $२\frac{१}{२}$ रुपये असेल, तर १ यार्डाची किंमत काय आहे? या तऱ्हेचे पक्षांत, फार सरळ प्रश्न शिकणाराचे दृष्टीपुढें आहे असें वाटतें. जर ५ यार्डांची किंमत १० रुपयें असली, तर प्रत्येकाची किंमत $\frac{१०}{५}$, किंवा २ रुपये होईल, असें त्यास त्वरेनें कळतें, आणि त्याच रितीनें मिश्र अपूर्णांकापासून खरें उत्तर येईल, असें

त्याचे मनांत येऊन या उदाहरणास $\frac{३\frac{१}{२}}{२\frac{१}{३}}$ असें मांडून रितीप्रमाणें $\frac{३}{२}$
थवा $१\frac{१}{२}$ काढून एक यार्डाची किंमत $१\frac{१}{२}$ रुपये आहेत अ
त्यास समजतें. हें उत्तर बरोबर निघतें खरें; परंतु ही रीति पूर्णांक
विषयीं खरी दिसती, ती अपूर्णांकावरहि लागू होण्यासाठीं कांहीं सि
करून दाखविण्याचें प्रयोजन नाहीं, असें त्याणें मनांत आणू नये; पैश
ची भलती कांहीं रकम आहे, तीस $२\frac{१}{३}$ वेळा घेतली असतां, $३\frac{१}{२}$ रुप
होतात, ती रकम वरचे प्रश्नांत इच्छिली आहे. एक रुपयास १
समभागांत विभागून, त्यांतले ६ भाग $२\frac{१}{३}$ वेळा पुनः पुनः घेतले तर
रुपया होईल. त्यास $३\frac{१}{२}$ वेळा घेण्यासाठीं, तसेंच पुनः पुनः केल्या
प्रत्येक पायरीस $३\frac{१}{२}$ असे ६ भाग किंवा २१ घेतले पाहिजेत. याव
रून $\frac{२१}{१४}$, अथवा $१\frac{१}{२}$ ही एक यार्डाची किंमत आहे.

पुरवणी भाग पांचवा.

गुणदर्शकांविषयीं.

लागरतम् कामांत आणतेसमयीं ही पुढील गोष्ट फार उपयोगी आहे, असें शिकणारास दिसेल. आतां, भागाकार करण्याचे पूर्वी, भागाकारांतील दशांश बिंदूचें स्थळ कोठे असावें, तें त्वरेनें काढण्याचे रितीविषयीं मात्र सद्यः येथें सांगतों.

जेव्हां कांहीं संख्येचे वर गराद मांडिली असती, जसें $\bar{७}$, या संख्येस उणी ह्मणावें, आणि त्या अर्थानें ती कामांत घ्यावी; त्याच जातीचे संख्येचे बेरिजेनें ती अधिक होती, आणि त्याच जातीचे संख्येचे वजाबाकीनें ती कमी होती असें समजावें; जसें, $\bar{७}$ आणि $\bar{२}$ यांची बेरीज $\bar{९}$ होती, आणि $\bar{७}$ यांतून $\bar{२}$ वजा केले, तर $\bar{५}$ रहातात. परंतु उण्ये संख्येशीं गरादे वांचून संख्येची बेरीज केली, तर संख्या कमी होती, आणि त्यांतून वजा केली, तर ती उणी संख्या अधिक होती असें समजावें. जसें, $\bar{७}$ आणि ४ यांची बेरीज $\bar{३}$, $\bar{७}$ आणि १२ यांची

१, २, ३, इत्यादि प्राप्ती आहे, आणि $\overline{१}$, $\overline{२}$, $\overline{३}$, इत्यादि तोटा आहे असें म-नांत आणावें; प्राप्ती मिळवणें अथवा तोटा गमावणें, आणि प्राप्ती गमावणें, अथवा तोटा मिळविणें हें सारिखेंच आहे असें समजावें. जसें $\overline{४}$ हे $\overline{११}$ यांणीं कमी केले, तर ७ होतात असें ह्मटलें, ह्मणजे जा समयीं ४ चा तोटा आला, त्या समयींच ११ चा तोटा काढिला हें ७ चे प्राप्तीबरोबर आहे असें ह्मणतात; आणि $\overline{४}$ यांस २ नीं कमी केले तर $\overline{६}$ होतात, असें ह्मटलें, ह्मणजे ४ चा तोटा असून २ ची प्राप्ती नाहींशी झाली, तर सर्व मिळून ६ चा तोटा होतो असें ह्मणतात.

संख्येचे **गुणदर्शकाचा** अर्थ या पुढीलप्रमाणें समजावा; जेव्हां दशांश बिंदूचे डाव्येकडे अंकस्थळें आहेत, तेव्हां गुणदर्शक, अंक स्थळांचे संख्येंत एक उणा इतका आहे. जसें, ३·२१४, १·००८३, ८, अथवा ८·००, ९·९९९, या सर्वांचा गुणदर्शक ० आहे. परंतु १७·३२, ४८, ९३·११६, या सर्वांचा गुणदर्शक १ आहे; १२६·०३ आणि १२६ यांचा गुणदर्शक २ आहे; ११९३७२६४·६६६ यांचा गुणदर्शक ७ आहे. परंतु दशांशचिन्हाचे डाव्येकडे कांहीं अंकस्थळें नसलीं, तर दशांशाचा पहिला अर्थ बोधक अंक पाहून, त्याप्रमाणें गुणदर्शकाचें चिन्ह उणें करावें. जसें, ·६१२, ·१२१, ·९००४ या सर्वांत दशांशाचे पहिल्ये स्थळीं अर्थबोधक अंक आहे, यामुळें त्यांचा गुणदर्शक $\overline{१}$ आहे; परंतु ·०१८ आणि ·०९९ यांचा गुणदर्शक $\overline{२}$ आहे; ·०००१७ यांचा गुणदर्शक $\overline{४}$; आणि ·००००००००१ यांचा गुणदर्शक $\overline{९}$ आहे.

भागाकाराचा गुणदर्शक काढाया करितां, भाज्याचा गुणदर्शकांतून भाजकाचा गुणदर्शक वजा कर, परंतु भाज्याचे पहिल्ये अर्थबोधक अंकापेक्षां भाजकाचा पहिला अर्थबोधक अंक अधिक असेल, तर वजावाकी करण्याचे पूर्वीं एक हातचा घेतला पाहिजे. उदाहरण, १४६·०८ यांस ·००२७९ यांणीं भागायाचें आहे असें मनांत आण. या दोन संख्यांचे गुणदर्शक २ आणि $\overline{३}$ आहेत; आणि २ तून $\overline{३}$ वजा केले तर ५ होतील. परंतु पहिल्यानें असें दिसतें कीं २७ हे त्यांचे स्थळांचे किमतीचा विचार न करितां नुसते घेतले, तर हे भाजकाचे पहिले अर्थ बोधक अंक, भाज्याचे पहिले दोन अंक ह्मणजे १४ यांपेक्षां अधिक आहेत. यामुळें वजाबाकी केल्याचे पूर्वीं $\overline{३}$ यांत हातचा एक

ह्मणजे भागाकाराचा गुणदर्शक ४ आहे, आणि, यामुळे भागाकारांत दशांश बिंदूचे डाव्येकडे ५ अंकस्थळें आहेत. अथवा जर भागाकाराचे पहिले अंक अबकडइफ असे असले, तर अबकडइफ असें दशांश चिन्ह मांडिलें पाहिजे. परंतु ·००२७९ यांस १४६·०८ यांणीं भागायाचें असतें, तर हातचे घेण्याचें प्रयोजन नसतें; आणि ३ यांतून २ वजा केले, तर ५ होतात; ह्मणजे, भागाकारांत पहिला अर्थबोधक अंक पांचव्येस्थळीं येईल. यावरून भागाकारांत पहिल्ये अर्थबोधक अंकाचे डाव्येकडे ·०००० असें येईल. आणि या रितीवरून कांहीं उदाहरणें केलीं असतां, ही गोष्ट पुरतेपणीं लक्षांत येईल. आणि तेणेंकरून भागाकाराचा पहिला अंक काढल्याचे पूर्वींच त्यास त्याचा योग्य अर्थ लावितां येईल.

पुरवणीं भाग सहावा.

पैक्याचे दशांशरूप हिशोबाविषयीं.

आणे, पै यांस रुपयांचें दशांशरूप देणें, अथवा त्याचे उलट दशांशांस रुपयाचें रूप देणें, असें बहुधा घडतें.

आणे, पै यांस रुपयांचें दशांशरूप देण्यासाठीं, ही पुढील सरळ रीति आहे; आरंभीं लक्षांत ठेवावें, कीं

८ आणे, हे रुपयाचे	०·५०	आहेत.
४ आणे	०·२५	
२ पै	$०·०१|०४\frac{१}{६}$	

यावरून २ पै ह्या १ रुपयाचे $\frac{१}{१००}$ चे इतक्या जवळजवळ आहेत, कीं त्या त्याचे बरोबर आहेत, अशी कल्पना करून ४ आणे होतपर्यंत पहिल्ये दोन दशांशस्थळांत कांहीं चूक येणार नाहीं; दोन स्थळांपर्यंत आल्यावर २४×२ पै = ०·२५; यावरून, दशांशांचीं पहिलीं दोन स्थळें काढण्याची रीति हीच आहे.

प्रत्येक चार चार आण्याविषयीं ०·२५ मांड, आणि त्यावरचे पैंची संख्या सम असली, तर प्रत्येक दोन दोन पै विषयीं, दशांशाचे दुसऱ्ये

ण्याचे वर असल्या, तर त्यावरचे विषम पै विषयीं, दशांशाचे दुसऱ्ये स्थळीं १ अधिक मांडावा, जेव्हां वरचा पै दोन आण्यापेक्षां कमी आहेत, तेव्हां विषम पै सोडाव्या.

जसें, आ. पै आ. पै

१३ .. ४ = १२ १६ = ०·७५+·०८ = ०·८३ रुपयाचे.

११ .. ७ = ८ ४३ = ०·५०+·२२ = ०·७२ रुपयाचे.

८ .. ९ = ८ ९ = ०·५०+·०४ = ०·५४ रुपयाचे.

शेवटल्ये ४ आण्याचे वर जा पै असतील, त्यांशिवाय दशांशाचे तिसऱ्ये आणि चवथ्ये स्थळांविषयीं कोणत्याहि पैपासून कांहीं निघत नाहीं, हें स्पष्ट आहे. कां कीं प्रत्येक २ पैवर ·०००४ $\frac{१}{६}$ इतकी कसर जाती, ती प्रत्येक ४ आण्यांस ·०१ होती. आणि ही पूर्वीचे हिशोबांत येती. यामुळें तिसरें आणि चवथें दशांशस्थळ भरायासाठीं या पुढील प्रमाणें कर.

शेवटील चार आण्यांवरचा पै जर सम असतील, तर त्या प्रत्येक पै विषयीं दशांशाचे चवथ्ये स्थळीं २ घे, अथवा विषम असतील, तर शेवटील दोन आण्यावरचे प्रत्येक पैविषयीं २ घे, आणि प्रत्येक आण्याविषयीं ६×२ पै ह्मणून १ अधिक घ्यावा.

जर चार दशांश स्थळांपेक्षां अधिक स्थळें घेतलीं पाहिजेत, तर शेवटील आण्यांवर जा पै असतील, तितके अंश आणि १२ छेद कल्पून त्या अपूर्णांकास दशांशरूप देऊन जोडून मांडावे.

लक्षांत ठेविलें पाहिजे, कीं $\frac{१}{१२}$ = ·०८३३ .. $\frac{७}{१२}$ = ·५८३३ ..

$\frac{२}{१२}$ = ·१६६६ .. $\frac{८}{१२}$ = ·६६६ ..

$\frac{३}{१२}$ = ·२५ .. $\frac{९}{१२}$ = ·७५ ..

$\frac{४}{१२}$ = ·३३३ .. $\frac{१०}{१२}$ = ·८३३ ..

$\frac{५}{१२}$ = ·४१६६ .. $\frac{११}{१२}$ = ·९१६६ ..

$\frac{६}{१२}$ = ·५

तर, आणे पैं

१३ .. ४ = ·८३ | ३३ | ३३ रुपयाचे आहेत.

११ .. ७ = ·७२ | ३९ | ५८३३

प्रत्येक ·२५ विषयीं ४ आणे मांड, आणि त्यांचे वर जे राहिले त्यांस, पैचें रूप देण्यासाठीं दर शेंकड्यास ४ वजा करून बाकी राहील तिची दुप्पट करावी, आणि दशांश बिंदू दोन स्थळें उजव्येकडे सारावा.

उदाहरण. ७ मण .. १३$\frac{1}{4}$शेर लोखंडाची किंमत दरशेरीं २ आ. ४ पै प्रमाणें काय होईल ?

आ. पै
२ .. ४=·१४५८३३३
४०
९·८३३३३..
७
४०·८३३३३
१० शेर .. १·४५८३३
२ शेर .. ·२९१६६
१ शेर .. ·१४५८३
$\frac{1}{4}$ शेर .. ·०३६४५८
रु. आ. पै.
४२·७६५६२ = ४२ ..१२.. ३ हें उत्तर.

या पुढीलप्रमाणें निघतें.

४२·७६५६२ यांपासून ४२ रुपये आणि ·७६५६२ रुपये तर ·७६५६२
·७५ = १२ आणे
·०१५६२
६२ शेंकडा चार प्रमाणें वजा करून
·०१५०० बाकी
१·५०० दोन दशांशस्थळें, उजव्येकडे सारून
२
३·०० दुप्पट करून
रु. आ. पै.
३ पै, यावरून ४२ .. १२ .. ३ उत्तर.

बहिवाटवहीचा रितीचे मूळ कारणाविषयीं.

याविषयींचे ग्रंथांमध्यें पुरतेपणीं समजाया जोगें असें बहुतकरून फार थोडें लिहितात, यामुळें जेव्हां हिशोब शुद्ध रितीनें ठेविलेले असतात, त्यांचा जो मूळ रिती त्यांविषयीं कांहीं सुचना एथें दिली असतां, जांस बहिवाटवही शिकण्याची असेल त्यांचे ती उपयोगी पडेल.

जो पुरुष व्यापार करितो, त्यास आपले व्यवहाराचे स्थितीचा झाडा घेतेसमयीं, या पुढील तीन गोष्टी बरोबर समजाव्या अशी इच्छा असती; **पहिली**, व्यापार करण्याचे आरंभीं अथवा जुना व्यापार असल्यास मागला झाडा घेतल्यावर आपल्ये जवळ काय होतें; **दुसरी**, पूर्वींचा आणि हालींचा झाडा घेण्याचे काळामध्यें व्यापाराचा निरनिराळ्या खात्यांमध्यें लाभ आणि हानी काय झाली ती; **तिसरी**, झाडा घेतल्यानंतर त्याचे जवळ एकंदर वित्तविषय किती तो. यांतील पहिल्या दोन गोष्टींपासून तिसरी गोष्ट सहज कळेल. याच रितीप्रमाणें एकंदर हिशोब तपासण्याचे मुदतीचे आंतच, कदाचित् एकाद्या खात्याची स्थिती कशी आहे हें जाणण्याची इच्छा असल्यास, तेंही काढितां येईल.

मागील झाड्यापासून, एक प्रकारचे व्यवहारांत जी कांहीं घडामोड जा रितीनें मांडितात त्यास **खातें** ह्मणतात. त्यामध्यें जमा आणि खर्च हीं मात्र असतात, आणि यावरून त्यांत **जमेची** किंवा रिणको, आणि **खर्चाची** अथवा धनको, अशा दोन बाजू आहेत असें ह्मणतात.

सगळे हिशोब बहुतकरून **पैक्यानें** ठेवितात. ह्मणजे जर कांहीं माल खरेदी केला, तर त्या खरेदीकरितां जो पैका दिला, त्यापैक्यानें त्या मालाचा हिशोब मांडितात. जर कोणी कर्जदारानें एकादी हुंडी आणून दिली, आणि त्या हुंडीचा पैका मुदतीनंतर मिळायाचा आहे, तर त्या हुंडीची किंमत पैक्यानें मांडितात. सर्व जिनसा, सरंजाम, घोडे इत्यादि, जा वस्तू व्यवहार कामासाठीं जवळ असतात, त्यांचा हिशोब त्यांचे किमतीवरून मांडितात. सगळें रोकड नाणें, ब्यांकनोट, इत्यादि जीं आपल्या जवळ असतात, अथवा बाहेरून आलेलीं असतात, तितकाच पैका आपल्ये वहींत लिहिलेला असतो, आणि तो शुद्ध पैका आहे ह्मणून त्यास **रोकड** असें ह्मणतात.

अशा कल्पनेवरून सर्व हिशोब ठेविलेले असतात. प्रत्येक खातें चालविण्याविषयीं वेगळाला कारकून आहे असें मानून शिकणाराची समजूत होत आहे, तर तसें त्याणें मानावें; ह्मणजे रोकड संभाळण्यास आणि तिची देवघेव करण्यास एक कारकून आहे; मुदत पुरी झाल्यावर जा हुंड्यांचा पैका घेणें आहे, त्यांविषयीं एक कारकून; मुदत पुरी झाल्यावर जा हुंड्यांचा पैका देणें आहे, त्याविषयीं एक कारकून; जर कापडाचा व्यापार आहे, तर त्याविषयीं एक कारकून; जर साकरेचा व्यापार असेल, तर त्याविषयीं एक कारकून; सावकारा बरोबर जा जा पुरुषांचा व्यापार असतो, त्याविषयीं एक कारकून; लाभ आणि हानीं यांविषयीं एक कारकून; आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

हे सर्व कारकून **अथवा खातीं** एक सावकाराचीं असतात, आणि शेवटीं त्या कारकुनांस या पुढीलप्रमाणें हिशोब द्यावा लागतो; ह्मणजे जी मालमत्ता त्यांचे स्वाधीन होती ती पुढें करावी, अथवा कोणास दिली हें दाखवून त्यांणीं मोकळें व्हावें. त्या कारकुनांनीं जें जें घेतलें असेल, अथवा जाविषयीं ते जिम्मेदार होते, त्याविषयीं ते **सावकारास** कर्जदार अथवा **रिणको** आहेत; जा सर्व वस्तु त्यांचा पासून जातात, अथवा जाविषयीं ते **धन्यास** जिम्मेदार नाहींसे होतात, त्याविषयीं ते मोकळे अथवा **धनको** होतात. जास हा विषय गुढा सारिखा न वाटावा असें असेल त्याणें हे शब्द विस्तीर्ण अर्थानें घ्यावे. जसें, कांहीं व्यवहारामुळें एखाद्या खात्याकडे **तिऱ्हाईत पुरुषाची** जिम्मेदारी येती, तेव्हां तो हिशोब आपल्या वहींत धनको केला पाहिजे, आणि कांहीं व्यवहारामुळें खात्याकडील तिऱ्हाईत पुरुषाची जिम्मेदारी नाहींसी होती, तेव्हां तो हिशोब आपल्या वहींत रिणको केला पाहिजे. परंतु जेव्हां कांहीं एक हिशोब आपल्या वहींतील एका खात्याची जिम्मेदारी काढून दुसऱ्ये खात्याकडे नेतो, तेव्हां पहिला हिशोब आपल्या वहींत रिणको केला पाहिजे, आणि जेव्हां कांहीं हिशोब एकाद्या खात्याकडे जिम्मेदारी आणितो, तेव्हां तो हिशोब धनको केला पाहिजे.

वर सांगितलेले सर्व कारकून अथवा खातीं कोणास जिम्मेदार असतात, आणि त्या जिम्मेदारीपासून त्यांस कोण मुक्त करितो? सावकार,

उत्तर वर सांगीतलेला **शिलकबाकी काढणारा कारकून** आहे, तो त्यांस मुक्त करील. परंतु वेगळालीं खातीं परस्परांला रिणको, आणि परस्परांनीं धनको असें ह्मणण्याची चाल आहे. जसें, घेण्याचे हुंड्यांला रोकड **रिणको** आहे, ह्मणजे अर्थ हाच, कीं रोकडखातें अथवा जो **कारकून** तें खातें राखितो, तो सावकारास हुंडीचे पैक्याविषयीं जिम्मेदार होतो. ही गोष्ट विस्तारानें उघडून सांगीतली असतां याप्रमाणें होईल; कोणीएक कारकून **क**, रोकडीचें खातें बाळगतो, आणि जेव्हां कोणी **अ** पुरुषापासून हुंडीचा पैका मिळाला असतो तो जेव्हां **क**चे हातीं येतो, तेव्हां त्या पैक्याविषयीं **क** जबाब देणारा असतो. यासारिखें घेण्याचे हुंडीचे खात्यांत याप्रमाणें मांडितात, ह्मणजे घेण्याचा हुंड्या रोकडीनें **धनको**. ही गोष्ट विस्तारानें सांगीतली असतां याप्रमाणें होईल; कोणी **ब** कारकून घेण्याचे हुंडीचें खातें राखितो, आणि जी **अ** ची हुंडी त्याजवळ होती ती मुदत भरल्यावर, **अ** जवळून पैका घेऊन **क** कारकुनास दिल्यावर, **ब** कडची जिम्मेदारी नाहींशी होती. घेण्याची हुंडी रोकडीनें धनको याचा अर्थ उघड आहे, परंतु रोकड, घेण्याचे हुंडीला रिणको असें ह्मणणें योग्य नाहीं. हुंडीबदल जो पैका मिळतो त्याविषयीं रोकडीचें खातें **सावकाराला** त्या रकमेनें रिणको, आणि घेण्याचे हुंडीनें रोकड रिणको आहे असें मांडण्यास योग्य आहे. कल्पनारूप ऋणें जांस देण्याचीं असतात, त्यांस त्यांतून कांहीं देत नाहीं, अज्ञानें जरी व्यवहारांत कांहीं अडथळा येत नाहीं, तथापि त्यापासून शिकणारा घोंटाळ्यांत पडतो; असें आहे, तथापि शिकणारानें हाच बोलण्याचा प्रकार काईम ठेवून त्याचा खरा अर्थ ध्यानांत ठेवावा.

जो कोणी **ऋणकरी** किंवा देणेंदार आहे, त्याचा वेगळाल्या देण्याचा रकमा त्याचा खात्यांत **रिणको केल्या** असें ह्मणतात; आणि जो धनको किंवा घेणेंदार, अथवा कांहीं रकमांपासून मुक्त झाला असतो, त्याचा खात्यांत त्या रकमा **धनको केल्या** असें ह्मणतात. जे पुरुष घेतात त्यांस **रिणको** केले पाहिजेत; आणि जे पुरुष देतात त्यांस **धनको** केले पाहिजेत.

हिशोबांत कांहीं खोडीत नाहीं. जर कांहीं रोख घेतलेली रकम परत केली, तर ती दिलेली रकम रोकडीचे खात्याचे जमेचे किंवा रि-

धनको अथवा खर्चाचे बाजूस दिली असें लिहितात.

जा वहींत निरनिराळीं खातीं घातलेलीं असतात, तीस **खतावणी** ह्मणतात. तीस दोन बाजू असतात, ह्मणजे पहिली अथवा रिणकोबाजू आणि तिचा समोरची दुसरी अथवा धनको बाजू. डावी बाजू नेहमी रिणको असती. याशिवाय व्यापारी दुसऱ्या कांहीं वह्या बाळगतात, परंतु त्यांचा योगानें खतावणी नीट राखण्यास मात्र सहाय्य होतें. जसें **खर्डावही**, तींत जी सर्व घेवदेव व्यवहारांत होती ती व्यवहारी भाषेनें लिहिलेली असती; दुसरी **रोजकीर्दीची वही**, तींत खर्डावहींत लिहिलेली सर्व देवघेव खतावणीचे पद्धतीप्रमाणें कांहीं नियमित काळीं मांडितात. रोजकिर्दीतील रकमा खतावणीचे जा पृष्ठावर नेलेल्या असतात, त्या पृष्ठांचा अंक रोजकीर्दींत त्या रकमेचे मागें मांडितात, आणि खतावणींतील रकमा रोजकीर्दीचे जा पृष्ठावरून घेतात, त्या पृष्ठाचा अंक खतावणींत त्या रकमेचे मागें असतो; हवाला देण्याचे या रितीपासून खतावणीमध्यें पुष्कळपर्णी संक्षेप करितां येतो. जसें, कांहीं दिवसांचे व्यवहाराची रोजकीर्द घालतेसमयीं, जर कित्येक रकमा एकाच दिवशीं एक वेळा किंवा वारंवार दिल्या किंवा घेतल्या असतील, असें जेव्हां घडतें, तेव्हां त्या सर्वांची बेरीज खतावणींत मांडितां येईल, आणि त्या किर्कोळ रकमांनीं रोकडीचा हिशोब रिणको किंवा धनको करावा; ह्मणजे प्रत्येक रकम सर्व रकमेचे पोटची आहे असें जाणून, धनको किंवा रिणको लिहावी. आतां एथें केवळ खतावणीविषयीं मात्र सांगण्याचें प्रयोजन आहे. बाकी सर्व वह्या, आणि त्या राखण्याची रीति, जरी फार उपयोगाची आहे, तरी त्यांस वह्या राखण्याचें मुख्य कारणाचा आधाराची गरज नसती. जे जे व्यवहार होतात, त्यांविषयींचा सर्व वेगळाल्या रकमा खतावणींत एकदांच मांडिल्या आहेत अशी कल्पना कर. वर सांगितल्यावरून असें दिसतें कीं प्रत्येक रकम दोन वेळा मांडिली जाती. जर **ब** चे नावावर कांहीं पैका **अ** देतो, तर एक्ये खात्यामध्यें तें याप्रमाणें मांडितात, **ब** नें **अ** धनको; आणि दुसऱ्या खात्यामध्यें असें मांडितात, **अ** ला **ब** **रिणको**. यास **दुहेरी वहिवाटवही** ह्मणतात; यावरून सर्व वहींतील रिणको बाजूचे सर्व रकमांची बेरीज, धनकोबाजूचे सर्व रकमांचे बेरिजेबरोबर असती.



तात, परंतु त्यांचे मांडण्याची तऱ्हा उलटी असते. साईस पडल्यास प्रत्येक रकमेची एकेरी मांडणी झाल्यावर, दुहेरी मांडणीहि करितां येईल. गुणाकाराचा कोष्टकास **दुहेरी वहिवाटवहीचा कोष्ठक** ह्मणतात, उदाहरण, ४२ हा अंक त्या कोष्टकांत जरी एक वेळ येतो, तरी तो दोन तऱ्हांनीं दिसण्यांत येतो, ह्मणजे, ६ वेळा ७, आणि ७ वेळा ६. अ, ब, क, ड, ई, अशीं पांच खातीं आहेत, आणि त्यांतील प्रत्येक खात्याचा दुसऱ्ये खात्याशीं व्यवहार आहे असें मनांत आण; आणि सर्व देणें **उभ्ये ओळींत** आणि सर्व घेणें **आडव्ये ओळींत** असें मांड. जसें पुढीलप्रमाणें;

	अ, रिणको	ब, रि०	क, रि०	ड, रि०	ई, रि०
अ, धनको		२३	१९	३२	४
ब, ध०	१७		६	११	२५
क, ध०	९	४१		१०	२
ड, ध०	१४	२८	१६		३
ई, ध०	१५	४	६०	१	

यांत १६ या रकमेविषयीं डचा खात्यांत ड, कनें धनको आहे, आणि कचा खात्यांत त्याच रकमेविषयीं क, डला रिणको आहे. आणि रिणको आणि धनको बाजूंची बेरीज एकसारिखीच असते, या ह्मणण्याचा अर्थ असा आहे, कीं वरचे अंकांची बेरीज उभ्ये किंवा आडव्ये ओळीनें केली तरी सारिखीच होईल.

जर वर दाखविल्याप्रमाणें व्यवहारांची स्थिति आहे, आणि खातेवही पुरी करण्याची आहे, तर त्यांची स्थिति या पुढीलप्रमाणें होईल; त्यांत जें बारीक अक्षरांनीं लिहिलें आहे, त्याची समजूत पुढें होईल.

बला....	१७	बनें....	२३	अला....	२३	अनें.....	१७
कला....	९	कनें....	१९	कला....	४१	कनें....	६
डला....	१४	डनें....	३२	डला....	२८	डनें.....	११
इला....	१५	इनें....	४	इला....	४	इनें.....	२५
बाकीला...	२३					बाकीनें....	२७
	७८		७८		९६		९६

क, रिणको.		क, धनको.		ड, रिणको.		ड, धनको.	
अला....	१९	अनें....	९	अला....	३२	अनें.....	१४
बला....	६	बनें.....	४१	बला....	११	बनें.....	२८
डला....	१६	डनें....	१०	कला....	१०	कनें.....	१६
इला....	६०	इनें.....	२	इला....	१	इनें.....	३
		बाकीनें....	३९	बाकीला...	७		
	१०१		१०१		६१		६१

इ, रिणको.		इ, धनको.		बाकी, रिणको.		बाकी, धनको.	
अला....	४	अनें....	१५	बला....	२७	अनें....	२३
बला....	२५	बनें.....	४	कला....	३९	डनें.....	७
कला....	२	कनें....	६०			इनें.....	४६
डला....	३	डनें.....	१				
बाकीला...	४६				७६		७६
	८०		८०				

वरचा कोष्टकांत जा वेगळाल्या रकमा एकदां मांडिल्या आहेत, त्या रकमा खालचा वेगळाल्या खात्यांमध्यें पुनः निरनिराळ्या मांडिल्या आहेत, असें दिसतें. परंतु जेव्हां सर्व खातीं पुरीं होतात, आणि अधिक कांहीं रकमा मांडण्याचा नसतात, त्या वेळेस ही एक शेवटची कृति

नांत येण्यासाठीं, मनांत आण, कीं एक नवा कारकून ठेविला आहे, जो सर्व खातीं पाहून त्यांतील सगळ्या रिणको आणि धनको रकमा काढून आपल्या स्वाधीन घेतो, आणि त्या खात्यांबाबद देणें आणि घेणें याविषयीं सावकारास जिम्मेदार होतो. या नव्या कारकुनास **बाकी काढणारा कारकून** असें नाव देतात, आणि प्रत्येक खातें आपल्या जवळचें सर्व देणें किंवा घेणें त्याचे हवालीं करितें. ह्मणजे, रोकडीचा कारकून आपल्या जवळची सर्व रोकड त्याचा हवालीं करितो; दोन जातींचा हुंड्या बाळगणारे कारकून आपल्या जवळचा देण्याचा अथवा घेण्याचा हुंड्या* त्याचा हवालीं करितात; निरनिराळ्या मालांचीं खातीं राखणारे कारकुनाजवळ जो माल विकल्यावांचून राहिलेला असतो, तो सर्व खरेदीचा दरानें हवालीं करितात; निरनिराळ्या पुरुषांचीं खातीं राखणारे कारकून त्या वेगळाल्ये पुरुषांकडून घेणें किंवा त्यांस देणें असेल, याविषयींचे आपल्या जवळचे दस्ताऐवज हवालीं करितात; याप्रमाणें पुढेंहि. परंतु जेथें घेण्यापेक्षां देणें अधिक असतें, तेथें हा बाकी काढणारा कारकून त्याजवळून कांहीं न घेतां त्या खात्याचें देणें देऊन खातें पुरें करितो; सारांश जा खात्याचा तपास करण्याकरितां तो जातो, त्या खात्याचा रिणको आणि धनको बाजूंचा बेरिजा बरोबर होत असें करितो. उदाहरण, वर दाखविलेल्या **अ** खात्यामध्यें **अ**नें सावकाराला ५५ रूपये देणें आहे, आणि सावकाराला त्या खात्यानें ७८ रूपये दिले आहेत. यावरून तो बाकी काढणारा कारकून त्या खात्याचे रिणको बाजूस २३ मांडितो, ह्मणजे तेणेंकरून त्या खात्यांत ती बाकी रिणको **अ**शीं होती, आणि बाकी खात्यांत ती रकम **अ**चे नावावर धनको होती. परंतु **ब** खात्यांत ९६ जमा आहेत आणि त्याणें ५९ मात्र दिले आहेत. यावरून तो बाकी काढणारा कारकून त्या **ब** खात्यापासून ३७ घेतो, ते त्यांत धनकोकडे बाकी असें मांडून ती बाकी, बाकी खात्यांत **ब**चे नावावर रिणको असें मांडितो. जर सर्व खातीं खरीं मांडलेलीं असलीं, तर बाकी खात्याचा दोन बा-

---

*हिशोब घेतेसमयीं वेगळाल्ये खात्यांमध्यें प्रत्येक रकमेचे समोर जो पैका मांडिलेला असतो तो घेणें किंवा देणें कसाहि असो, तरी तो त्या रकमेबदल पैकाच आहे असें लक्षांत ठेवावें.

होत नाहींत, तेव्हां त्यांतून एक रकम बाकी खात्याचा एक बाजूस जाती, आणि दुसरी रकम बाकी खात्याचा दुसऱ्या बाजूस जाती. यावरून सावकाराचे हिशोबाचा एक भागाचे खरेपणाविषयीं हें बाकी खातें ताळा आहे; जर त्या खात्याचा दोनहि बाजूंचा रकमांच्या बेरिजासारख्या नसल्या, तर त्यांत कांहीं रकमा लिहून त्यांचा बरोबरीचा रकमाबरोबर मांडिल्या नसाव्या, अथवा बेरिजा घेण्यांत कांहीं चूक झाली असें समजावें.

परंतु जापेक्षां बाकी खात्याचा दोनहि बाजूंचा **बेरिजासारख्या** नेहमी असाव्या, आणि जापेक्षां सावकारास घेणें आहे असें **रिणको बाकी**पासून, आणि त्यास लोकांचें देणें असें **धनको बाकी**पासून वाटतें, असें जर वाटत आहे, तर जा व्यवहारांत हानीं किंवा लाभ कांहींच झाला नसतो, त्यासच केवळ ही रीति लागू होती असें नजरेस येणार नाहीं कीं काय? यावरून जा पुंजीनें सावकारानें व्यापार करण्यास **आरंभ केला**, आणि तीपासून जो लाभ किंवा हानीं होती हीं दोन जा खात्यांत मांडिलेलीं असतात, त्यांचा विचार करावा लागतो, तीं हीं आहेत, ह्मणजे **पुंजी खातें**, आणि **लाभ हानीं खातें**. जी पुंजी व्यापाराचे आरंभी असती, तिची वहिवाट दुहेरी वहीप्रमाणें करायाची असेल, तर खातेवही घालण्याचे आरंभीं, सावकार प्रत्येक कारकुनाचे हवालीं त्याचें त्याचें काम अथवा खातें करितो, अशी कल्पना करावी. पुंजी खात्यांत पुंजी ह्मणजे स्वतां सावकार आहे, असें समजून सर्व माल मत्तेनें पुंजीखातें धनको आणि सर्व **जिम्मेदारीनें** रिणको होतें; परंतु निरनिराळीं खातीं पुंजीपासून जें काय घेतात, त्याजविषयीं तीं रिणको होतात, आणि जी जिम्मेदारी घेतात तितक्यानें तीं खातीं धनको होतात. उदाहरण, खातेवही घालतेसमयीं सावकाराची ५०० रुपये पुंजी आहे, असी कल्पना कर. तर हे ५०० रुपये त्याणें रोकडीचे कारकुनाचे हवालीं केले असें दिसेल, आणि तेणेंकरून पुंजीचे खात्यांत या पुढीलप्रमाणें दिसेल, ह्मणजे, **पुंजी ५०० रुपयांचे रोकडीनें धनको**; आणि रोकडीचे खात्यांत याप्रमाणें दिसेल, ह्मणजे, **रोकड ५०० रुपयांचे पुंजीला रिणको.** मनांत आण, कीं आरंभीं

खात्यांत या पुढीलप्रमाणें दिसेल, ह्मणजे, **पुंजी मोतीराम याला** ५० रुपयांविषयीं रिणको आहे, आणि मोतीरामाचे खात्यांत याप्रमाणें दिसेल, ह्मणजे, **मोतीराम पुंजीनें** ५० रुपयांविषयीं धनको आहे. याप्रमाणें पुंजी खातें ठेविलें असतां, जा पुंजीनें सावकार व्यवहार आरंभितो, त्याजविषयीं दुहेरी हिशोब होतात.

वह्यांतील जा रकमांचे समोर त्यांचे किमती बरोबरीच्या रकमा दिसत नाहींत, त्या सर्व रकमा जा खात्यांत मांडिल्या असता, त्यास **लाभ हानीं** खातें ह्मणतात. हें लाभहानीं खातें, अथवा जो कारकून तें राखितो, तो प्रत्येक हानींविषयीं आणि प्रत्येक लाभाचा कारणाविषयीं जिम्मेदार आहे असें कल्पितात. ह्मणून हें खातें प्रत्येक हानींविषयीं रिणको आणि प्रत्येक लाभाविषयीं धनको होतें; जर कांहीं माल ८० रुपयांस खरेदी घेतला आहे, आणि त्यास २० रुपयांची नुकसानी होऊन तो ६० रुपयांस विकला, तर स्पष्ट दिसेल, कीं याप्रमाणें मांडिलें पाहिजे, ह्मणजे, **रोकड ६० रुपयांचे मालाला रिणको** आणि **माल ६० रुपये रोकडीनें धनको.** आतां आरंभीं सर्व मालाचे खरेदीविषयीं जो रोकड पैका किंवा हुंड्या दिल्या असतील, त्यांजविषयीं ८० रुपयांची रकम मालाला रिणको, अशी वहींत कोठें तरी असावी. ती जर लक्षांत आणली नाहीं, तर खात्याचे खरेपणांस बाध येईल; कारण खातें पुरें करण्याचेसमयीं, बाकी काढणाऱ्या कारकुनाला हें कारण समजल्यावांचून जी रोकड त्यास मिळायासयोग्य दिसती, त्यापेक्षां २० रुपये कमी आहेत असें दिसेल; आणि यावरून दुहेरी वहिवाटवहीची योजना चालणार नाहीं. जापेक्षां मालाचा बाकी खात्यानें जो माल शिलक असेल तो दाखवून द्यावा. यावरून मालाचा खात्यानें २० रुपयांची जिम्मेदारी लाभहानीं खात्याकडे द्यावी अथवा या पुढीलप्रमाणें मांडावें हें सोईस पडेल, ह्मणजे, **माल २० रुपये लाभहानीनें धनको,** आणि **लाभहानीं २० रुपयांचे मालाला रिणको.** पुनः घरखर्च, आणि व्यापारसंबंधीं खर्च, वेतन इत्यादि, जा खर्चाबद्दल कांहीं परत येत नाहीं, त्या सर्व रकमांचीं खातीं बाकी काढण्याचे पूर्वीं, लाभहानीं खात्यांत मांडून हिशोब पुरा केला पाहिजे; जसें, मनांत आण, कीं घरभाडें इत्यादिपासून जी मिळकत होती, तिजपेक्षां त्यासंबंधीं खर्च २०० रुपये

भहानीं खात्याकडे नेऊन या पुढीलप्रमाणें त्या खात्याची खातेबाकी काढावी; ह्मणजे **घरखर्च लाभहानीनें २०० रुपयांविषयीं धनको**, आणि **लाभहानीं घर खर्चाला २०० रुपयांविषयीं रिणको.** अशा तऱ्हेनें **पुढल्ये वर्षाची खातेवही घालण्याविषयीं जा रकमा अगत्य असाव्या, त्यांशिवाय बाकीखात्यामध्यें दुसऱ्या कांहीं रकमा घेऊं नयेत**, ह्मणून लाभहानीं खातें, बाकी खातें घालण्याचे पूर्वी वेळोवेळीं कामांत येतें.

कांहीं रकम एका खात्यांतून काढून दुसऱ्ये खात्यांत नेणे, हें मोठें विचाराचें काम आहे. देण्याचे खात्याचे धनको रकमांविषयीं घेण्याचें खातें धनको होतें, आणि देण्याचे खात्याचे रिणको रकमांविषयीं घेण्याचें खातें रिणको होतें. यावरून रीति पुढीलप्रमाणें आहे; देण्याचे खात्याची खाते बाकी काढ, आणि जा बाजूस कांहीं बाकी रकम मांडावी लागती, ती बाकी रकम देण्याचे खात्यामध्यें, जसा पक्ष असेल त्याप्रमाणें घेण्याचे खात्याला रिणको, किंवा धनको मांड, आणि तीच रकम घेण्याचे खात्यामध्यें देण्याचे खात्याला रिणको किंवा धनको मांड. जसें अचे खात्यावरून रकम काढून बचे खात्यामध्यें मांडायाची आहे, आणि बचें खातें मात्र बाकी खात्यांत अणायाचें आहे, असें मनांत आण. जर हीं दोन्हीं खातीं पुढीलप्रमाणें असलीं, तर बारीक अक्षरांनीं जा रकमा लिहिल्या आहेत त्या मात्र हिशोब करण्याचे पूर्वी येतील.

अ, रिणको.	अ, धनको.	ब, रिणको.	ब, धनको.
किर्कोळीला १००	किर्कोळीनें ५००	किर्कोळीला ६००	किर्कोळीनें ४००
बला ४००		बाकीला . . २००	अनें . . . ४००
रुपये ५००	रुपये ५००	रुपये ८००	रुपये ८००

आणि शेवटीं बाकी खात्यांत याप्रमाणें मांडितात, **बनें २०० रुपयांविषयीं धनको**, आणि त्यावरून असें दिसतें, कीं या दोन खात्यांबाबद रिणको बाजूपेक्षां धनको बाजू २०० रुपयांनीं अधिक आहे.

त्यांत नेलें पाहिजे; कां कीं या वर्षीचा लाभ आणि हानी, दुसऱ्ये वर्षाची खातेवही घालतेसमयीं सावकाराची पुंजी किती आहे, हें त्यास समजावें याशिवाय दुसरा कांहीं उपयोग नाहीं. तर याप्रमाणें केल्यावर, वर सांगितल्ये रितीनें बाकीखातें पुरें करितां येईल.

पुंजी खात्याची स्थिती केवळ लाभहानी खात्यावरून फिरती, आणि हीं दोन्हीं खातीं पूर्वीचे खात्यांपेक्षां कांहीं विशेष तऱ्हेनें भिन्न आहेत, आणि बाकीखातें हा एक सर्वांचा मध्यस्थ आहे. पुंजीखातें आणि लाभहानींखातें हीं दोन्हीं सावकाराचे ऐवजीं असतात; जें त्या खात्याचें हिताहित होतें, तेंच सावकाराचें हिताहित आहे; जर त्या खात्यांतील रिणको बाजूपेक्षां धनको बाजू अधिक असेल, तर तो दार आहे, आणि धनको बाजूपेक्षां रिणको बाजू अधिक आहे, तेव्हां तो नादार आहे. दुसऱ्ये सर्व खात्यांमध्यें ही गोष्ट उलटी असती. जर कोणी दुष्ट पुरुषाचे हातीं खतावणी सांपडली, आणि व्यवहाराची खरी स्थिति जशी असती, ती स्थिती खोटी करून दाखवायास इच्छितो, तर पुंजी आणि लाभहानींखातें, या दोन खात्यांचे रिणको बाजूकडील निरनिराळ्ये रकमेचे उजव्ये बाजूस एकएक शून्य देईल, आणि बाकी सर्व खात्यांमध्यें धनको बाजूस शून्य मांडील. यावरून लाभहानींखात्याचा हिशोब खात्यांत मांडल्यावर, काईम पुंजीची रकम बाकीखात्याचा धनको बाजूस दिसेल, आणि सावकाराचें कर्ज त्याच बाजूवरहि दिसतें, जर त्याजवळ काईम पुंजी नसली, तर ती रकम **पुंजी** असें मानूं नये, परंतु ती **नादारीची रकम** आहे असें समजावें. परंतु बाकीखात्याचे रिणको बाजूस सावकाराचा सर्व ऐवज दिसतो, तो बाकी काढणाऱ्ये कारकुनानें दुसऱ्ये कारकुनापासून घेतला आहे, आणि तो कारकून त्याविषयीं दुसऱ्या सर्व कारकुनांस रिणको आहे.

नव्ये शिकणारानें धनको आणि रिणको या शब्दांचे अर्थाशीं पक्कें माहित व्हावें हें अवश्यक आहे, आणि खर्डावहींतून वेगळाल्या रकमा योग्य खात्यांत योग्य बाजूस मांडण्यास शिकलें पाहिजे, कारण ही गोष्ट केवळ अभ्यासानें येती. वहिवाटवही विषयींचे ग्रंथ पढून समजायास सहाय्य होईल, इतकें मात्र या पुस्तकांत सांगितलें आहे, त्या मोठ्ये ग्रंथांत तरी केवळ उदाहरणांशिवाय दुसरें कांहीं बहुतकरून असत नाहीं असें त्याचे नजरेस येईल.

दुसरा भाग आठवा.

अपूर्णांकांचा किमतीचे जवळ जवळ असे दुसरे अपूर्णांक काढण्याविषयीं.

सांगीतल्ये अपूर्णांकाचे किमतीचे जवळजवळ अपूर्णांक काढायाची एक फार उपयोगी रीति आहे, ती शिकणारास माहित असावी. सांगीतल्ये अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद यांचा दृढभाजक पूर्वी सांगीतल्ये रितीप्रमाणें काढून, सर्व वेगळाले भागाकार एका ओळींत मांड. नंतर याप्रमाणें मांड,

$$\frac{१}{\text{पहिला भागाकार}} \qquad \frac{\text{दुसरा भागाकार}}{\text{पहिला भागाकार}\times\text{दुसरा भागाकार}+१}$$

नंतर तिसरा भागाकार घेऊन त्याणें सांगीतल्ये दुसऱ्ये अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद गुण, नंतर अंशाचे गुणाकारास त्याचे पूर्वीचे पदाचा अंश मिळीव, आणि छेदाचा गुणाकारास छेद मिळीव. अशानें तिसऱ्ये अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद उत्पन्न होतील. चवथा भागाकार घेऊन तिसऱ्ये आणि दुसऱ्ये अपूर्णांकांपासून चवथा अपूर्णांक उत्पन्न कर; आणि याप्रमाणें सर्व भागाकार संपतपर्यंत कृति कर. उदाहरण, $\frac{९१३१}{१३१२८}$ हा अपूर्णांक घे.

९१३१)	१३१२८	(१,२
११३७	३९९७	(३,१
५५१	५८६	(१,१५
२०१	३५	(१,२
२६	९	(१,८
८	१	

९१३१ आणि १३१२८ यांचा दृढभाजक काढण्याची अति संक्षेप कृति बाजूवर दाखविली आहे, आणि त्यांचे भागाकार आणि अपूर्णांक हे पुढील आहेत.

१	२	३	१	१	१५	१	२	१	८	भागाकार,
$\frac{१}{१}$	$\frac{२}{३}$	$\frac{७}{१०}$	$\frac{९}{१३}$	$\frac{१६}{२३}$	$\frac{२४९}{३५८}$	$\frac{२६५}{३८१}$	$\frac{७७}{११२०}$	$\frac{१०४४}{१५०१}$	$\frac{९१३१}{१३१२८}$	अपूर्णांक.

हा एक अपूर्णांकांचा समुदाय आहे, आणि त्यांतील शेवटचा अपू-

प्रमाणें खालीं काढून दाखविले आहेत;

$$\text{पहिला अपूर्णांक} = \frac{१}{\text{पहिला भागाकार}} = \frac{१}{१}$$

$$\text{दुसरा अपूर्णांक} = \frac{\text{दुसरा भागाकार}}{\text{पहिला भागाकार} \times \text{दुसरा भागाकार} + १} = \frac{२}{३}$$

$$\text{तिसरा अपूर्णांक} = \frac{\text{दुसऱ्याचा अंश} \times \text{तिसरा भागाकार} + \text{पहिल्याचा अंश}}{\text{दुसऱ्याचा छेद} \times \text{तिसरा भागाकार} + \text{पहिल्याचा छेद}} = \frac{२ \times ३ + १}{३ \times ३ + १} = \frac{७}{१०}$$

$$\text{चवथा अपूर्णांक} = \frac{\text{तिसऱ्याचा अंश} \times \text{चवथा भागाकार} + \text{दुसऱ्याचा अंश}}{\text{तिसऱ्याचा छेद} \times \text{चवथा भागाकार} + \text{दुसऱ्याचा छेद}} = \frac{७ \times १ + २}{१० \times १ + ३} = \frac{९}{१३};$$

आणि याप्रमाणें पुढेंहि. परंतु भागाकाराचे योगानें मुळचा अपूर्णांकावर, केवळ तर्कापेक्षां कांहीं अधिक कृति केली आहे. $\frac{१}{१}, \frac{२}{३}, \frac{७}{१०}, \frac{९}{१३}$, इत्यादि अपूर्णांकांचा समुदाय मुळचे अपूर्णांकाचे किंमती जवळ जवळ येत जातो, ह्मणजे दिलेल्ये अपूर्णांकापेक्षां पहिला अपूर्णांक फार मोठा आहे, दुसरा अपूर्णांक फार लहान आहे, तिसरा फार मोठा आहे, आणि याप्रमाणें अनुक्रमानें आहेत, परंतु प्रत्येक अपूर्णांक त्याचे पूर्वींचे अपूर्णांकापेक्षां दिलेल्ये अपूर्णांकाचे अधिकजवळजवळ होत जातो. जसें, $\frac{१}{१}$ हा फार मोठा आहे, आणि $\frac{२}{३}$ हा फार लहान आहे; परंतु $\frac{१}{१}$ हा दिलेल्ये अपूर्णांकापेक्षां जितका मोठा आहे, तितका $\frac{२}{३}$ लहान नाहीं. आणि $\frac{७}{१०}$ हा जरी फार मोठा आहे, तरी $\frac{२}{३}$ हा जितका दिलेल्ये अपूर्णांकापेक्षां लहान आहे, तितका तो मोठा नाहीं.

आणखी, मूळचा अपूर्णांकाचें आणि यांतून कोणत्याहि अपूर्णांकाचें अंतर, एका अपूर्णांकापेक्षां कधींहि अधिक असत नाहीं, त्या अपूर्णांकाचे अंशस्थळीं एक येतो, आणि वजा केलेल्या अपूर्णांकाचा छेद आणि त्याचे पुढल्ये अपूर्णांकाचा छेद यांचा गुणाकार छेदस्थळीं येतो. जसें, $\frac{१}{१}$ याचें दिलेल्ये अपूर्णांकाशीं $\frac{१}{३}$ इतकें अंतर नाहीं, $\frac{२}{३}$ याचें $\frac{१}{३०}$ इतकें अंतर नाहीं, $\frac{७}{१०}$ याचें $\frac{१}{१३०}$ इतकें अंतर नाहीं, $\frac{९}{१३}$ याचें $\frac{१}{२२९}$ इतकें अंतर नाहीं, याप्रमाणें पुढेंहि.

शेवटीं या समुदायांतील कोणताहि अपूर्णांक दिलेल्ये अपूर्णांकाज-

वळ जितका येतो, तितका लहान अंश छेदाचा अपूर्णांक जवळ येत नाहीं. जसें, $\frac{२४९}{३५८}$ हा अपूर्णांक $\frac{९१३१}{१३१२८}$ याचे जवळ जितका येतो, तितका दुसरा कोणताहि अपूर्णांक जाचा अंश २४९ पेक्षां कमी, आणि जाचा छेद ३५८ पेक्षां कमी, असा अपूर्णांक जवळ येत नाहीं.

शिकणारानें हवीं तीं उदाहरणें घ्यावीं, आणि जा अपूर्णांकापासून प्रारंभ केला असतो, तो अपूर्णांक शेवटीं आल्यावर कृतीचा खरेपणाचा ताळा सांपडतो. याच गोष्टीचा दुसऱ्ये तऱ्हेचा ताळा यापुढीलप्रमाणें आहे. उत्पन्न झालेल्ये अपूर्णांकाचे समुदायांतील जवळजवळचे कोणतेहि दोन अपूर्णांकांचे वजाबाकीचा अंश १ असावा. जसें, वर केलेल्ये उदाहरणांत $\frac{१६}{२३}$ आणि $\frac{२४९}{३५८}$ यांस समछेद केल्यावर, त्यांचे अंश ५७२८ आणि ५७२७ आहेत, आणि त्यांचा समछेद २३×३५८ आहे.

दुसऱ्ये उदाहरणासाठीं हा पुढील प्रश्न घेतों; वर्षाची लांबी ३६५·२४२२४ दिवस आहे, तिला व्यवहारांत ३६५$\frac{१}{४}$ दिवस असें घेतात. ह्मणून वरचा अपूर्णांक $\frac{२४२२४}{१०००००}$ घे, आणि रितीप्रमाणें कर.

```
२४२२४ )१००००० ( ४,७,१,४,९,२
  २४९६     ३१०४
    ६४      ६०८
     ०      ३२
```

$\frac{१}{४}$ $\frac{७}{२९}$ $\frac{८}{३३}$ $\frac{३९}{१६१}$ $\frac{३५९}{१४८२}$ $\frac{७५७}{३१२५}$

आणि ·२४२२४ याचे अति जवळचा अपूर्णांक $\frac{७५७}{३१२५}$ आहे. यावरून जी एक वर्षाची कसर ३६५ दिवसांचे वर आहे, ती सुमारें ४ वर्षांत १ दिवसा इतकी होती, आणि अशानें जी ही चूक येती ती ११६ वर्षांनीं एक दिवसा इतकी होत नाहीं; याहून सूक्ष्मपणानें पाहिलें असतां, २९ वर्षांत ७ दिवस घेतले, तर जी चूक होती ती ९५७ वर्षांत १ दिवसाइतकी होत नाहीं; आणि याहून अधिक सूक्ष्मपणानें पाहिलें असतां ३३ वर्षांत आठ दिवस घेतले तर जी चूक येती, ती ५३१३ वर्षांत एक दिवसाइतकी होत नाहीं, आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

कोणतेहि अपूर्णांकाचे वर्गमुळाचे बरोबरी जवळ जवळ असा अपूर्णांक काढण्यास, वरची रीति याप्रमाणें लावितां येईल;

√४३=६+...

६	१५४५५४५१६६	१५४ इत्या०
१	७६३९२९३६७१	७६३ इ०
६	११३१५१३१११२	११३ इ०

जा अंकाचें वर्गमूळ काढावयाचें असेल, तो अंक मांड, जसें, ४३. याचें वर्गमूळ ६ आणि कांहीं अपूर्णांक आहे. ६ हा पूर्णांक पहिल्ये आणि तिसऱ्ये आडव्ये ओळीचे आरंभीं मांड, आणि १ हा अंक नेहमीं दुसऱ्ये ओळीचे आरंभीं मांड. नंतर पुढें दाखविल्याप्रमाणें मागल्ये उभे ओळपासून पुढील उभी ओळ सिद्ध कर;

पहिली ओळ ब′, अ′, क′, या क्रमानें दुसरी ओळ उत्पन्न करितात.
अ अ′=अचेवरची ब′क′ ची कसर.
ब ब′=४३−अ′[2] भागिले ब याचा भागाकार.
क क′=६+अ भागिला ब′ याचे भागाकारांतील पूर्णांक.

यावरून दुसरी ओळ या पुढीलप्रमाणें करितात;

६ | १=६ वरची ७×१ यांची कसर, ७ आणि १ हे वर काढले.
१ | ७=४३−$\overline{६\times६}$ भागिला १.
६ | १=६+६ भागिले ७ यांचे भागाकारांतील पूर्णांक.

यावरून तिसरी ओळ या पुढीलप्रमाणें होईल;

१ ५=१ वरची १×६ यांची कसर.
७ ६=४३−१×१ भागिले ७.
१ १=६+१ भागिले ६ या भागाकारांतील पूर्णांक.

आणि याप्रमाणें पुढेंहि. अशी कृति करीत असतां १, ७, १, ही दुसरी उभी ओळ पुनः येती, आणि त्यानंतर दुसऱ्या उभ्या ओळी अनुक्रमानें येतात. शेवटची कृति करायासाठीं तिसऱ्ये आडव्ये ओळींतील पहिला ६ हा अंक सोडून बाकीचे १, १, ३, १, ५, १, ३, इत्यादि- अंक घे, आणि या कलमाचे आरंभीं सांगीतलेली रीति पुढें दाखविल्या प्रमाणें त्या अंकांस लाव;

१	१	३	१	५	१	३	१	१	इत्यादि
१/१	१/२	४/७	५/९	२९/५२	३४/६१	१३१/२३५	१६५/२९६	२९६/५३१	

यावरून ४३ सांचे वर्गमूळाचे जवळ $६\frac{१६५}{२९६}$ आहेत, आणि यांपासून $\frac{१}{२९६\times५३१}$ इतकी चूक येत नाहीं.

जर कृति केली, तर $६\frac{१६५}{२९६}$ हे $\frac{१९४१}{२९६}$ आहेत, आणि यांचा वर्ग $\frac{३७६७४८१}{८७६१६}$, अथवा $४३-\frac{७}{८७६१६}$ आहे.

जेव्हां कांहींएक वर्गमूळ वारंवार घेण्याचें असतें, तेव्हां ही रीति कामांत आणितात, आणि यावरून जवळ जवळ होई असा कांहीं व्यवहारी अपूर्णांक आहे की नाहीं हें जाणायाचें असतें.

उदाहरण, $\sqrt{२}$ यांची गरज वारंवार लागते.

$\sqrt{२} = १+\cdots$

१	१	१				
१	१	१				
१	२	२	२	२	२	२

$\frac{१}{२}$ $\frac{२}{५}$ $\frac{५}{१२}$ $\frac{१२}{२९}$ $\frac{२९}{७०}$ $\frac{७०}{१६९}$ इत्या०

येथें असें दिसतें कीं $१\frac{२९}{७०}$ यापासून $\frac{१}{७०\times१६९}$ इतकी चूक होत नाहीं; यामुळें $\frac{९९}{७०}$ अथवा $\frac{१००-१}{७०}$ हा जवळचा अपूर्णांक आहे. आणि यापासून कृति करण्यास फार सोपें पडेल. सारांश $\frac{९९}{७०}$ हे, १·४१४२८५७ आहेत, परंतु खरे अंक १·४१४२१३५· · ·आहेत.

हें पुढील एक दुसरें उदाहरण आहे.

$\sqrt{१९} = ४ +\cdots$

४	२	३	३	२	४	४	२					
१	३	५	२	५	३	१	३					
४	२	१	३	१	२	८	२	१	३	१	२,	इ०

$\frac{१}{२}$ $\frac{१}{३}$ $\frac{४}{११}$ $\frac{५}{१४}$ $\frac{१४}{३९}$ इत्या०

पुरवणी भाग नववा.

अंकांचे साधारण गुणांविषयीं.

पहिलें कृत्य. जर अपूर्णांकास अति संक्षेपरूप दिलें, ह्मणजे, जर त्या अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद एकापेक्षां मोठ्या अंकानें भागिले जात नाहींत, तर त्यापेक्षां लहान अंश आणि छेदाचे अपूर्णांकाची किंमत त्या अपूर्णांका इतकी होणार नाहीं.

$\frac{अ}{ब}$ असा अपूर्णांक घे, आणि मनांत आण कीं, अ आणि ब यांस एकाशिवाय दुसरा दृढभाजक नाहीं; आणि जर शक्य असेल, तर त्या अपूर्णांकाचे किमतीचा अपूर्णांक $\frac{क}{ड}$ आहे, आणि त्यांत अ पेक्षां क लहान आहे, आणि ब पेक्षां ड लहान आहे असें मनांत आण. आतां जापेक्षां $\frac{अ}{ब} = \frac{क}{ड}$, तर $\frac{अ}{क} = \frac{ब}{ड}$; आतां जापेक्षां अ $>$ क, आणि ब $>$ ड, तर या मागल्ये दोन अपूर्णांकांतील अंश त्यांचे त्यांचे छेदानें भागिले असतां भागाकारांत कांहीं पूर्णांक येईल, तो पूर्णांक दाखवायाकरितां म घे, आणि त्यांचा बाक्या दाखवायासाठीं इ आणि फ घे. तर

$$\frac{अ}{ब} \text{ अथवा } \frac{मक+इ}{मड+फ} = \frac{क}{ड} = \frac{मक}{मड}$$

यावरून, $\frac{इ}{फ}$ आणि $\frac{मक}{मड}$ हे दोन्हीं बरोबर असावे, जर ते बरोबर नसतील, तर $\frac{मक+इ}{मड+फ}$ हा अपूर्णांक $\frac{मक}{मड}$ याचे बरोबर होणार नाहीं, परंतु तो $\frac{मक}{मड}$ आणि $\frac{इ}{फ}$ या दोन अपूर्णांकांचेमध्यें येईल. यावरून, $\frac{अ}{ब} = \frac{इ}{फ}$; ह्मणून जा अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद यांस एकापेक्षां मोठा दृढभाजक नाहीं, तो अपूर्णांक जर लहान अंश आणि छेदाचे अपूर्णांकाबरोबर होईल, तर अधिक लहान अंश आणि छेदाचे अपूर्णांकाबरोबर तो पहिला अपूर्णांक होईल. जर $\frac{अ}{ब} = \frac{इ}{फ}$, यांशीं वरचेसारिखी कृति केली, तर $\frac{अ}{ब} = \frac{ग}{ह}$ होईल, त्यांत ग $<$ इ, ह $<$ फ आहे, आणि याप्रमाणें पुढेंहि आतां, जर कांहीं अपूर्णांकाचे अंश आणि छेद प्रत्येक पायरीस एक किंवा अनेक एकंमांनीं कमी करणारी अशी कृति चालविली असतां, शेवटीं त्या अपूर्णांकाचे अंश अथवा छेद अथवा ते दोन्हीं शून्याबरोबर होतील. $\frac{अ}{ब} = \frac{वि}{व}$ ही एक कृति आहे अशी कल्पना कर, आणि अ $=$ कवि $+$ क्ष, आणि ब $=$ कव$+$य, असे घे; यावरून $\frac{कवि+क्ष}{कव+य} = \frac{वि}{व}$. आतां जर क्ष$=$० आणि यला कांहीं किंमत आहे असें मानणें अशक्य, का कीं त्यापासून $\frac{कवि}{कव+य} = \frac{कवि}{कव}$ असें खोटें उत्तर येतें. जर क्षला कांहीं किंमत आहे, आणि य $=$ ० असें असलें, तर वरचे सारिखेंच खोटें उत्तर येईल; आणि जर क्ष आणि य हे दोन्हीं शून्याबरोबर असतील, तर अ $=$ कवि आणि ब $=$ कव, अथवा अ आणि ब यांचा साधारण भाजक क आहे. आतां १ पेक्षां क अधिक असावा, का कीं,

वि आणि व हे क आणि ड पेक्षां कमी आहेत, आणि प्रतिज्ञेप्रमाणें क आणि ड हे अ आणि ब यांपेक्षां कमी असावे. यामुळें अ आणि ब यांस १ पेक्षां अधिक असा दृढभाजक क आहे, परंतु प्रतिज्ञेप्रमाणें त्यांस १ पेक्षां मोठा भाजक नाहीं. यावरून जर, अ आणि ब हे पूर्णांक १ पेक्षां मोठे पूर्णांकानें भागिले जात नाहींत, तर $\frac{अ}{ब}$ हें अपूर्णांकाचें **अतिसंक्षेपरूप** अवश्य आहे, आणि अ आणि ब हे **परस्पर अविभाज्य** आहेत.

दुसरें कृत्य. जर अब हा गुणाकार कनें भागिला जातो, आणि जर बनें क अविभाज्य आहे, तर अला क भागील. $\frac{अब}{क}=ड$ असें घे, तर $\frac{ब}{क}=\frac{ड}{अ}$. आतां $\frac{ब}{क}$ हें अतिसंक्षेपरूप आहे; यावरून, मागल्ये कृत्या-प्रमाणें, ड आणि अ यांस साधारण भाजक असावा. तो साधारण दृढभाजक के आहे, आणि अ = केल, आणि ड = केम असें घे. तर $\frac{ब}{क}=\frac{केम}{केल}=\frac{म}{ल}$, आणि $\frac{म}{ल}$ अति संक्षेपरूपांत आहे; परंतु $\frac{ब}{क}$ हि अतिसंक्षेप-रूपांत आहे; यावरून म = ब, आणि ल = क, असें असावें, कारण असें नसल्यास एक अति लहान संक्षेपरूप पदांचा अपूर्णांक, त्यापेक्षां अधिक लहान संक्षेपरूप पदांचे अपूर्णांकाबरोबर होईल. यावरून अ=केक, अथवा कनें अ भागिला जातो. आणि यावरून असें सिद्ध होतें कीं, जर एक संख्या दुसऱ्ये दोन संख्यांनीं अविभाज्य असेल, तर ती त्या दोन संख्यांचे गुणाकारानेंहि अविभाज्य होईल. ब आणि क यानें अ अविभाज्य आहे, असें मनांत आण, तर अचा कोणताहि भाजक, ब अथवा क यांस भागणार नाहीं, आणि तो भाजक, बक या गुणाकारा-सहि भागणार नाहीं; कारण बकचा जो भाजक त्यांतून एकानें अवि-भाज्य आहे, तो दुसऱ्याला भागील.

तिसरें कृत्य. जर बनें अ अविभाज्य आहे, तर तो बचा सर्व घातांनींहि अविभाज्य आहे. अचा प्रत्येक भाजक बनें अविभाज्य आहे, आणि त्यामुळें बला तो भागीत नाहीं. ह्मणून, वर सांगितल्याप्रमाणें, अचा कोणताहि भाजकानें $ब^2$ भागिला जात नाहीं. यावरून $ब^2$ याणें अ अविभाज्य आहे, आणि याप्रमाणें अचा प्रत्येक भाजकहि भागीला जात नाहीं; यामुळें अचा कोणताहि भाजक $बब^2$ यास भागीत नाहीं, यामुळें $ब^3$नें अ अविभाज्य आहे. आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

यावरून, जर ब नें अ अविभाज्य आहे, तर बचा कोणत्याहि घाताला अ निःशेष भागीत नाहीं. याच कारणावरून जर कोणतेहि अपूर्णांकाचा छेद २ आणि ५ यांशिवाय दुसरे कोणतेहि अविभाज्य अंकानें भागिला जात नाहीं, तर तशा छेदाचे अपूर्णांकाशिवाय दुसऱ्या अपूर्णांकास दशांशरूप देण्याचें अशक्य. कां कीं जर $\frac{अ}{ब}=\frac{क}{१०^{न}}$, यांतून $\frac{क}{१०^{न}}$ हें दशांश अपूर्णांकाचें साधारणरूप आहे, तर $\frac{अ}{ब}$ अतिसंक्षेप रूपांत आहे असें मनांत आण ; तर $\frac{१०^{न}अ}{ब}$ हा पूर्णांक आहे, यावरून दुसऱ्ये कृत्याप्रमाणें बनें $१०^{न}$ भागिला जावा, आणि त्याचप्रमाणें ब चा सर्व भाजकांनींहि भागीला जावा. यावरून जर ब चा भाजकामध्यें २ आणि ५ यांशिवाय दुसरे कांहीं अविभाज्य अंक असले, तर या कृतींत १० स भागीत नाहीं, असा एक अविभाज्य अंक आहे, आणि तो १० चा एकाद्या घातास भागितो हें अशक्य आहे.

चवथें कृत्य. जर अनें ब अविभाज्य आहे, तर ब, २ब,...(अ—१)ब इत्यादि ब चा गुणितांस अनें भागिलें असतां निरनिराळ्या बाक्या रहातील. कां कीं जर न पेक्षां म मोठा असेल, आणि हे दोन्हींहि अपेक्षां लहान असतील, तर मब आणि नब यांपासून सारखीच बाकी निघेल, यावरून मब—नब, अथवा (म—न)ब यास अ निःशेष भागितो; यावरून (दुसरे कृत्या) प्रमाणें, म—न यास अ निःशेष भागितो, ह्मणजे लहान अंकास मोठा अंक भागितो हें अशक्य आहे.

जर कांहीं संख्येचे अविभाज्य अंकांनीं गुण्यगुणकरूप विभाग केले, अथवा तीस केवळ अविभाज्य अंकांचे गुणाकाराचें रूप दिलें, (जसें ३६०=२×२×२×३×३×५), आणि जर हे अविभाज्य अंक दाखविण्यास अ, ब, क, इत्यादि घेतले, आणि जितक्या वेळा हे अविभाज्य अंक येतात, तो वेळांक दाखविण्यास अ, ब, क, इत्यादि घेतले, तर ती संख्या $अ^{अ}×ब^{ब}×क^{क}×$ इत्यादि अशी होईल, तर ही गोष्ट केवळ एक तऱ्हेनें मात्र होईल; कां कीं कोणताहि अविभाज्य अंक व, वर दाखविल्याप्रमाणें गुणकांत येत नाहीं, तर तो अनें अविभाज्य आहे, आणि यामुळें $अ^{अ}$ नें भागिला जात नाहीं, बनें अविभाज्य आहे, आणि यामुळें ब नेंहि अविभाज्य आहे, आणि यामुळें $अ^{अ}×ब^{ब}$ नें अविभाज्य आहे. याप्रमाणें चाललें असतां सर्व गुणाकार अथवा दिलेल्या संख्येनें व अविभाज्य आहे असें सिद्ध करितां येईल.

वर सांगितलेल्या $अ^{अ} ब^{ब} क^{क}$ ··· इत्यादि अशा संख्येचे भाजकांची संख्या (अ+१)(ब+१)(क+१) ··· आहे, आणि यांत ० आणि ती मूळ संख्या यांचाहि संग्रह होतो. कां कीं $अ^{अ}$ याचे भाजक १, अ, $अ^{२}$ ··· $अ^{अ}$ इत्यादि सर्व मिळून अ+१ इतके आहेत, यांशिवाय दुसरे नाहींत. याचप्रमाणें $ब^{ब}$ याचे भाजकांची संख्या ब+१ आहे, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. आतां प्रत्येक जातींतून एक एक घेऊन त्या सर्वांचे गुणाकारानें दिलेल्या संख्येचे भाजक निघतात, यावरून त्यांची संख्या १० व्ये पुरवणीप्रमाणें (अ+१)(ब+१)(क+१)· · · आहे.

जर, ३,५,७,११, इत्यादि यांतून कोणत्याहि अविभाज्य अंकांनीं कांहीं न संख्या निःशेष भागिली जाती, तर नपर्यंत सर्व संख्यांचा तिसरा भाग ३ नीं निःशेष भागिला जातो, त्यांचा पांचवा भाग ५ नीं निःशेष भागिला जातो, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. परंतु याशिवाय अधिकहि घडतें; जेव्हां ३ चीं गुणितें सोडिलीं असतात, तेव्हां जा बाक्या रहातात त्यांचा बरोबर पांचवा भाग ५ नीं निःशेष भागिला जातो; कां कीं सगळ्यांचा पांचवा भाग ५ नीं निःशेष भागिला जातो, आणि जे अंक वेगळे केलेले असतात त्यांचाहि पांचवा भाग ५ नीं निःशेष भागिला जातो, यावरून जे बाकी रहातात त्यांचा पांचवा भागहि ५ नीं निःशेष भागिला जाईल. पुनः सर्वांचा सातवा भाग ७ नीं निःशेष भागिला जातो, आणि जे ३ नीं अथवा ५ नीं अथवा १५ नीं निःशेष भागिले जातात, त्यांचा सातवा भागहि ७ नीं निःशेष भागिला जातो, यावरून ३ अथवा ५ अथवा ते दोन्हीं यांचीं सर्व गुणितें वेगळीं काढून जे बाकी रहातात, त्यांचा सातवा भाग ७ नीं निःशेष भागिला जातो; आणि याप्रमाणें पुढेंहि. यावरून ३,५,७, अथवा ११ नीं निःशेष भागिल्या जात नाहींत, अशा अंकांची न पेक्षां कमी संख्याही पुढील आहे, नचे $\frac{२}{३}$ चे $\frac{४}{५}$ चे $\frac{६}{७}$ चे $\frac{१०}{११}$. याचप्रमाणें चाललें असतां असें दिसतें, कीं जा संख्या ननें अविभाज्य आहेत, त्यांची संख्या, ह्मणजे जा अ, ब, क, · · · इत्यादि नचे अविभाज्य गुण्यगुणकांनीं निःशेष भागिल्या जात नाहीं, त्यांची संख्या या पुढीलप्रमाणें आहे.

$$न\frac{अ-१}{अ}\frac{ब-१}{ब}\frac{क-१}{क}\cdots \text{ अथवा } अ^{अ-१}ब^{न-१}क^{क-१}\cdots(अ-१)(ब-१)\times(क-१)\cdots$$

जसें, ३६० हे $२^3 ३^2 ५$, आहेत, त्यांचे भाजकांची संख्या ४×३×२, अथवा २४ आहे, आणि ३६० ला अविभाज्य अशा ३६० पेक्षां $२^2$३.१.२.४ अथवा ९६ संख्या कमी आहेत.

पांचवें कृत्य. जर बनें अ अविभाज्य असेल, तर अ, $अ^2$, $अ^3$, ... इत्यादि श्रेणीचीं पदें बनें भागिलीं, तर १ बाकी राहीपर्यंत निरनिराळ्या बाक्या येतील, आणि १ बाकी आल्यानंतर बाक्यांचा क्रम पूर्वीसारिखा अनुक्रमानें फिरून येऊं लागेल.

अ ÷ ब यापासून र बाकी निघती, परंतु एथें र एका बरोबर नाहीं; तर $अ^2$÷ब यापासून जी बाकी निघती, ती रअ÷ब याचे बाकी बरोबर आहे, परंतु ती बाकी (चवथ्ये कृत्याप्र०) र नाहीं; ह्मणून ती स आहे असें मनांत आण. तर $अ^3$÷ब यापासून जी बाकी निघती, ती सअ÷ब याचे बरोबर आहे, आणि १ याचे बरोबर स नसेल, तर ही बाकी (चवथ्ये कृत्याप्र०) र, अथवा स, यांचे बरोबर होऊं शकणार नाहीं; ती बाकी दाखवायास ट घे. तर $अ^4$÷ब यापासून जी बाकी निघती, ती टअ÷ब याचे बरोबर आहे; जर १ याचे बरोबर ट नसेल, तर ही बाकी र, स, अथवा ट, यांचे बरोबर होऊं शकणार नाहीं; ती बाकी दाखविण्यास य, घे. याप्रमाणें जोंपर्यंत १ ही बाकी येईतोंपर्यंत निरनिराळ्या बाक्या काढीत जावें; नंतर पुढल्ये कृतींत अ÷ब याची जी बाकी पूर्वीं आलेली असती, तीच पुनः येती. आतां कोठें तरी १ ही बाकी यावी; कां कीं बनें भागिलें असतां ०, १, २, ... ब−१ यांशिवाय दुसऱ्या कांहीं बाक्या येत नाहींत; आणि (तिसऱ्ये कृत्याप्र०) ० कधीं येत नाहीं, यावरून जेव्हां ब−२ इतक्या **निरनिराळ्या** बाक्या आल्या असतात, आणि त्यांतून एकहि बाकी १ बरोबर नसती, तेव्हां पुढली बाकी दुसऱ्या पूर्वींचा सर्व बाक्यांहून भिन्न असावी, ह्मणून ती १ असावी. जर पूर्वीं १ ही बाकी आली नसती, तर $अ^{ब-1}$ यापासून १ ही बाकी यावी; आणि यानंतर बाक्यांचा क्रम फिरावा हें अवश्य आहे.

जसें, ७, ७^2, ७^3, ७^4, इत्यादि यांस ५ नीं भागिलें असतां २, ४, ३, १, इत्यादि बाक्या येतील असें दिसेल.

सहावें कृत्य. दोन मघातांचें अंतर त्यांचे मूळांचे अंतरानें निःशेष

भागिलें जातें; अथवा $\text{अ}^{\text{म}}-\text{ब}^{\text{म}}$ हे $\text{अ}-\text{ब}$ याणें निःशेष भागिले जातात, कां कीं

$$\text{अ}^{\text{म}}-\text{ब}^{\text{म}}=\text{अ}^{\text{म}}-\text{अ}^{\text{म}-१}\text{ब}+\text{अ}^{\text{म}-१}\text{ब}-\text{ब}^{\text{म}}=\text{अ}^{\text{म}-१}(\text{अ}-\text{ब})+\text{ब}(\text{अ}^{\text{म}-१}-\text{ब}^{\text{म}-१})$$

यांतून जर $\text{अ}^{\text{म}-१}-\text{ब}^{\text{म}-१}$ हे $\text{अ}-\text{ब}$ याणें निःशेष भागिले जातात तर $\text{अ}^{\text{म}}-\text{ब}^{\text{म}}$ हि निःशेष भागिला जातो. परंतु $\text{अ}-\text{ब}$ याणें $\text{अ}-\text{ब}$ निःशेष भागिला जातो; यावरून $\text{अ}^{२}-\text{ब}^{२}$ हि निःशेष भागिला जातो; $\text{अ}^{३}-\text{ब}^{३}$ हि निःशेष भागिला जातो; आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

यामुळें जर अ आणि ब यांस कनें भागिलें असतां बाकी सारिखीच राहील, तर $\text{अ}^{२}$ आणि $\text{ब}^{२}$, $\text{अ}^{३}$ आणि $\text{ब}^{३}$ इत्यादि वेगवेगळे कनें भागिले असतां सारिख्याच बाक्या राहतील; कां कीं याचा अर्थ असा होतो कीं कनें $\text{अ}-\text{ब}$ निःशेष भागिला जातो. परंतु $\text{अ}^{\text{म}}-\text{ब}^{\text{म}}$ यांस $\text{अ}-\text{ब}$ निःशेष भागितो, आणि यामुळें $\text{अ}-\text{ब}$ याचा प्रत्येक भाजक अथवा कहि निःशेष भागितो; परंतु $\text{अ}^{\text{म}}$ आणि $\text{ब}^{\text{म}}$ यांस कनें भागून जर सारख्या बाक्या राहात नाहींत, तर $\text{अ}^{\text{म}}-\text{ब}^{\text{म}}$ यास क निःशेष भागणार नाहीं.

सातवें कृत्य. जर ब अविभाज्य अंक आहे, आणि बनें अ निःशेष भागिला जात नाहीं, तर $\text{अ}^{\text{ब}}$ आणि $(\text{अ}-१)^{\text{ब}}+१$ यांस बनें भागिलें असतां सारिख्याच बाक्या रहातात. हें कृत्य येथें सिद्ध करून दाखवितां येत नाहीं, कां कीं या ग्रंथापासून जितकें बिजगणीताचें ज्ञान होतें, त्यापेक्षां हें कृत्य समजण्यास विशेष ज्ञान असलें पाहिजे.

आठवें कृत्य. वरचे पक्षांत $\text{अ}^{\text{ब}-१}$ यास बनें भागिलें असतां १ बाकी रहाती. मागल्ये कृत्यावरून $\text{अ}^{\text{ब}}-\text{अ}$ यापासून जी बाकी निघती, ती $(\text{अ}-१)^{\text{ब}}+१-\text{अ}$, अथवा $(\text{अ}-१)^{\text{ब}}-(\text{अ}-१)$ याचे बाकी बरोबर असती; ह्मणजे अतून १ कमी केला तरी $\text{अ}^{\text{ब}}-\text{अ}$ याचे बाकींत कांहीं फेर पडत नाहीं. याच रितीप्रमाणें, त्यांतून दुसरा एक कमी करितां येईल, आणि याप्रमाणें पुढें केलें असतां बाकीमध्यें कांहीं अंतर पडत नाहीं. शेवटीं त्याचें रूप $१^{\text{ब}}-१$, अथवा ० असें होतें, आणि त्यापासून ० ही बाकी येती. यावरून $\text{अ}^{\text{ब}}-\text{अ}$, अथवा $\text{अ}(\text{अ}^{\text{ब}-१}-१)$ यास ब निःशेष भागितो; आणि जापेक्षां अनें ब अविभाज्य आहे, यावरून (दुसरे कृत्याप्र०) $\text{अ}^{\text{ब}-१}-१$ यास ब भागील; ह्मणजे, जर ब अविभाज्य अंक आहे, आणि बनें अ

निःशेष भागिला जातो, तर $अ^{ब-१}$ यास बनें भागिलें असतां १ बाकी राहील.

मागें सांगितलेल्या (५) व्या आणि (७) व्या कृत्याप्रमाणें जर बनें अ अविभाज्य असेल, तर १, अ, $अ^२$, $अ^३$, इत्यादि यांस अनुक्रमानें बनें भागिलें असतां बाक्या निघतात, त्यांचे आरंभीं १ येतो, आणि जर ब अविभाज्य अंक असेल, तर पूर्वीं कोठें १ ही बाकी आली नसल्यास ती $अ^{ब-१}$ यापासून येईल, आणि जरी ती बाकी पूर्वीं आली असली अथवा नसली, तरी $अ^{ब-१}$ यापासून अवश्य येईल. जाठिकाणापासून १ ही बाकी येती तेथून बाक्यांचा क्रम फिरतो, आणि बाक्यांचे क्रमाचे आरंभीं १ हा अंक नेहमी येतो. यावरून जा पहिल्या घातापासून १ ही बाकी येती तो घात जर $अ^म$ असला आणि ब अविभाज्य अंक असला, तर मची किंमत ब–१, अथवा त्याचें कांहीं गुणित होईल.

परंतु ब पेक्षां म लहान असतां म, मअ, $मअ^२$, $मअ^३$, इत्यादि श्रेणीचे पदांस ब नें भागिलें असतां बाक्यांचे क्रम निघतील, आणि त्यांचे आरंभीं म येईल. जर १, र, स, ट, इत्यादि असा बाक्यांचा पहिला क्रम असेल, तर म, मर, मस, मट, इत्यादि यांपासून जो बाक्यांचा क्रम निघेल, तो दुसरा क्रम होईल. आरंभा शिवाय पहिल्या क्रमांत $अ^{ब-१}$ याचा पूर्वीं जर १ येत नाहीं, तर ब–१ याचा खालचे सर्व अंक १, र, स, ट, इत्यादि क्रमांत येतात; आणि जर (४) कृत्याप्रमाणें बनें म अविभाज्य असेल, तर ते सर्व अंक निराळ्या क्रमानें म, मर, इत्यादि बाक्यांत येतील. परंतु १, र, स, ट, इत्यादि हा क्रम जर पुरा नसेल, तर म, मर, मस, इत्यादि यांपासून बाक्यांचा निराळा क्रम उत्पन्न होईल.

अपूर्णांकास दशांश अपूर्णांकाचें रूप देण्याचे कृतीमध्यें हे सर्व शेवटील सिद्धांत सिद्ध होतात. जर बनें म अविभाज्य असेल, अथवा $\frac{म}{ब}$ हा अपूर्णांक अति संक्षेप रूपाचा असेल, तर कृति करितानां म, म×१०, $म×१०^२$, इत्यादि भागिले बनें असे भागाकार येतील. जर १० चा एकादा घात जसे, $१०^न$ हा बनें भागिला जाणार नाहीं, तर या कृतीचा शेवट कधींहि होणार नाहीं; आणि ब मध्यें २ आणि ५ हे अविभाज्य गुण्यगुणक नसतील, तर तो $१०^न$ घात बनें भागिला जाणार नाहीं. सर्व पक्षांत भागाकार पुनः पुनः येतो, आणि हें येणें पहिल्ये

अंकापासून होतें, किंवा कांहीं अंक सोडून होतें. जसें, $\frac{१}{७}$ यापासून, ·१४२८५७१४२८५७ इत्यादि येतात; परंतु $\frac{१}{१४}$ यापासून ·०७(१४२८५७)(१४२८५७), इत्यादि येतात; आणि $\frac{१}{२८}$ यापासून ·०३(५७१४२८)(५७१४२८) इत्यादि येतात.

$\frac{म}{ब}$ या अपूर्णांकांत जेव्हां ब अविभाज्य अंक आहे, आणि ब पेक्षां म लहान आहे, तेव्हां भागाकार आरंभापासून पुनः पुनः येऊं लागतो; आणि जे अंक वारंवार येतात त्यांची संख्या ब−१, अथवा त्याचा कांहीं मापक अशी संख्या असती. आणि ही गोष्ट अशी असावी असें वरचा कृत्यांपासून दिसतें.

पुढें चालायाचे पूर्वीं एक भागाकारांतील जे अंक वारंवार येतात ते लिहून दाखवितों, आणि ते अंक काढून जा बाक्या रहातात त्याहि त्यांचे बरोबर लिहून दाखवितों. $\frac{१}{१७}$ हा अपूर्णांक घे तर,

$$०_{10}५_{15}८_{14}८_{4}२_{6}३_{9}५_{5}२_{16}९_{7}४_{2}१_{3}१_{13}७_{11}६_{8}४_{12}७_{1}$$

हे अंक याप्रमाणें वाचावे; १० भागिले १७, भागाकार ०, बाकी १०; $१०^{२}$ भागिले १७, भागाकार ०५, बाकी १५; $१०^{३}$ भागिले १७, भागाकार ०५८, बाकी १४; आणि याप्रमाणें पुढें. $१०^{१६}$ यांस १७ नीं भागिलें असतां सिद्धांताप्रमाणें १ बाकी राहती.

०५८८ इत्यादि यांस १७ चे आंतील कोणत्याहि अंकानें गुणिलें, तर वरचे सारिखाच क्रम येतो, परंतु त्याचा आरंभ निराळ्ये तऱ्हेनें होतो. जसें, जर १३ नीं गुणिलें, तर

७६४७०५८८२३५२९४११ असें होतें.

आणि वरचा भागाकारांत जा ठिकाणीं १३ बाकी आहे, त्यापुढें जो भागाकार येतो, तो यांत आरंभीं आहे. जर ७ नीं गुणिलें, तर ४११७ इत्यादि येतील; याचें कारण उघड आहे; $\frac{१}{१७}\times१३$, अथवा $\frac{१३}{१७}$ या अपूर्णांकास दशांश अपूर्णांकाचे रूप देतानां, १३० भाज्यकरून $\frac{१}{१७}$ याचे कृतीप्रमाणें कृति चालवितों, आणि यापुढें क्रम संपण्यास चार अंक असतात.

भागाकाराचे क्रमांतील पहिल्ये अर्धांतील अंक आणि दुसऱ्या अर्धांतील अंक हे अनुक्रमानें परस्पर ९ चें पूरीकरण आहेत. आणि त्याचप्रमाणें त्या दोन अर्धांतील बाक्या परस्पर १७ चें पूरीकरण आहेत. जसें, $०_{१०}५_{१५}८_{१४}८_{४}$ इत्यादि आणि $९_{७}४_{२}१_{३}१_{१३}$ इत्यादि यांत ०+९=९, ५+४=९, ८+१=९, इत्यादि, आणि १०+७=१७, १५+२=१७, १४+३=१७, इत्यादि. याचा उपयोग पुढें दाखविल्याप्रमाणें आहे; $अ^{ब-१}$ यास कामांत आणायाचे पूर्वीं जर बाकी १ रहात नाहीं, तर ब अविभाज्य आहे असें कल्पून ब−१ सम होईल; तो २क आहे असें ह्मण. तर, $अ^{२क}-१$ यास ब निःशेष भागितो; परंतु $अ^{क}-१$ आणि $अ^{क}+१$ यांचे गुणाकाराबरोबर $अ^{२क}-१$ आहे, ह्मणून त्यांतून एकपद बनें निःशेष भागिलें जावें. $अ^{क}-१$ हें पद बनें निःशेष भागिलें जात नाहीं, कारण (ब−१) या घाताचे पूर्वीचा अचा घात बनें निःशेष भागिला जाईल, आणि या उदाहरणांत तसें घडत नाहीं; यावरून $अ^{क}+१$ हें पद बनें निःशेष भागिलें जातें, ह्मणून $अ^{क}$ यास बनें भागिलें असतां ब−१ बाकी रहाती, आणि क पायरीवर कृतीचें अर्ध पुरें होतें, जसें, वरचा उदाहरणांत ब=१७, अ=१० आणि कृतीचा आठवे पायरीवर १६ बाकी रहातात. पुढल्ये पायरीवर १०(ब−१), अथवा ९ब+ब−१० यापासून ब−१० ही बाकी रहाती. परंतु पहिली बाकी १० आहे आणि १०+(ब−१०)=ब. जर हें पुरीकरण कोणत्याहि पायरीवर आढळलें, तर तें तसेंच पुढें चालेल हें दाखवितों; कोणतीएक बाकी र आहे, तिचे पुढली बाकी ब−र आहे, आणि सर्वांची बेरीज ब आहे असें मनांत आण. पहिल्या बाकीचे पुढले पायरीवर १०र यांस बनें भागितों, आणि दुसऱ्ये बाकीचे पुढल्ये पायरीवर १०ब−१०र यांस बनें भागितों. आतां १०र आणि १०ब−१०र यांची बेरीज बनें निःशेष भागिली जाती, आणि या दोन नव्ये पायऱ्यांपासून अशा बाक्या निघाव्या कीं त्यांची बेरीज बचे बरोबर यावी, आणि याप्रमाणें पुढें; आणि **भागाकारांची** बेरीज ९ यावी, कां कीं १०र आणि १०ब−१०र या बाक्यांचे बेरिजेपासून भागाकार १० येतो, आणि या पैकीं दोन बाक्यांपासून, १ उत्पन्न होतो.

जर $\frac{१}{५९}$, आणि $\frac{१}{६१}$ हे अपूर्णांक घेतले, तर यांचे पुनः येणारे भागांत ५८ आणि ६० अंक आहेत असें दिसेल. त्यापैकीं पहिले अर्धे

अंक एथें लिहून दाखविले आहेत, आणि जें पूरीकरण वर सांगितलें त्याचा आधारानें बाकीचे अर्धे अंक शिकणारानें काढावे.

०१६९४९१५२५४२३७२८८१३५५९३२२०३३८, इत्यादि.
०१६३९३४४२६२२९५०८१९६७२१३११४७५४०, इत्यादि.

या दोन संख्या आहेत त्यांतून पहिलीस ५९ चे आंतील कोणत्याहि अंकानें गुणिलें, आणि दुसरीस ६१ चे आंत कोणत्याहि अंकानें गुणिलें, तर जे गुणाकार येतील ते वरचा संख्यांसारिखेच येतील, परंतु एक शेवटाकडील कांहीं अंक दुसरे शेवटाकडे येतील.

परंतु ब अविभाज्य असतां ब—१ इतके अंक आल्याचे पूर्वी कदाचित् १ ही बाकी येईल; त्यापक्षांत वर दाखविल्या प्रमाणें ब—१ यास भाजकाचे अंकांची संख्या निःशेष भागील. उदाहरण, $\frac{1}{41}$ हा अपूर्णांक घे. याचे भागाकाराचे पुनः पुनः येणारे अंक वरप्रमाणें मांडिले असतां, ते ५ अंक आहेत असें दिसेल, आणि ४१—१ यांस ५ भागितात.

$$0_{10}\ 2_{18}\ 4_{16}\ 3_{37}\ 9_{1}$$

आतां या भागाचे अंकांस १०,१८,१६, अथवा ३७ इत्यादि यांणीं गुणिलें असतां त्यांचीं स्थानें बदलतील. परंतु त्यांस ४१ चे आंतील दुसऱ्ये कोणत्ये अंकानें गुणिलें, तर तो गुणाकार, दुसऱ्या अपूर्णांकाचा भाग होईल, आणि त्या अपूर्णांकाचा छेद ४१ होईल. पुढें जे क्रम दाखविले ते याप्रमाणें आहेत.

$0_{10}\ 2_{18}\ 4_{16}\ 3_{37}\ 9_{1}$	$1_{9}\ 2_{8}\ 1_{39}\ 9_{21}\ 5_{5}$
$0_{20}\ 4_{36}\ 8_{32}\ 7_{33}\ 8_{2}$	$1_{19}\ 4_{26}\ 6_{14}\ 3_{17}\ 4_{6}$
$0_{30}\ 7_{13}\ 3_{7}\ 1_{29}\ 7_{3}$	$2_{28}\ 6_{34}\ 8_{12}\ 2_{38}\ 9_{11}$
$0_{40}\ 9_{31}\ 7_{23}\ 5_{25}\ 6_{4}$	$3_{27}\ 6_{24}\ 5_{35}\ 8_{22}\ 5_{15}$

$\frac{म}{41}$ या अपूर्णांकाचे दशांश काढायासाठीं बाकी अंकांमध्यें म पहा, आणि ज्या भागांत तो म आहे तो भाग घेऊन बाकीचे पुढल्ये अंकापासून आरंभ कर. जसें, $\frac{34}{41}$ हे ·८२९२६८२९२६, इत्यादि आहेत,

आणि $\frac{१५}{४१}$ हे ३६५८५३६५८५, इत्यादि आहेत. या भागांतील दोन शेवटांपासून सारख्ये अंतरावरचे भाग परस्परांचे पुरीकरण आहेत, जसें, ०२४३९ आणि ९७५६०, ०७३१७ आणि ९२६८२, इत्यादि, आणि जर ०२४३९ पहिला भाग ४१ चे आंतील कोणत्ये एक अंकानें गुणिला, तर तो अंक बाकीचे अंकांत पहा, ह्मणजे त्या बाकीचे पुढल्ये अंकापासून त्या भागांत तो गुणाकार सांपडेल. जसें, ०२४३९ हे २३ नीं गुणिले, तर ५६०९७ हे येतात, ६ नीं गुणिले तर १४६३४ येतात.

पुढें जे अंक दिले आहेत, त्यांपेक्षां अधिक अंक न घेतां भागाकाराचें फळ शेवटपर्यंत कसें करितां येतें तें शिकणारानें शोधून काढावें. जा अपूर्णांकाचा भाग शोधून काढायाचा आहे, तो $\frac{१}{८७}$ आहे.

८७)१००(०११४९४२५
१३०
४३० ०११४९४२५×२५
८२० २८७३५६२५×२५
३७० ७१८३९०६२५×२५
२२० १७९५९७६५६२५×२५
४६० ४४८९९४१४०६२५
२५

०११४९४२५२८७३५६२५
७१८३९०६२५
१७९५९७६ | ५६२५
| ४४८९९४
०११४९४२५२८७३५६३२१८३९०८०४५९७७ | ०११४९४

पुरवणी भाग दहावा.

संयोगांविषयीं.

संयोगांविषयींचा कांहीं गोष्टी एथें सांगतों, कारण ग्रंथामध्यें जें त्याचें व्याख्यान केलें आहे, त्यापेक्षां थोडक्यांत व्याख्यान एथें केलें आहे.

मनांत आण कीं चार पेट्या आहेत, आणि त्यांत अनुक्रमानें ५,७,३, आणि ११ अशा चकत्या आहेत. तर पेट्यांजवळ जाण्याचा क्रम मनांत न आणतां एक चकती प्रत्येक पेटींतून किती तऱ्हांनीं काढितां येईल? उत्तर, ५×७×३×११ इतक्या तऱ्हांनीं काढितां येईल. कारण, पहिल्या पेटींतून एक चकती ५ निरनिराळ्ये तऱ्हांनीं काढितां येईल, आणि या प्रत्येक काढण्यास दुसऱ्ये पेटींतील ७ काढण्याच्या तऱ्हांतून एक एक जोडावी, ह्मणजे तेणेंकरून ५×७ इतक्या काढण्याचा तऱ्हा पहिल्या दोन पेट्यांतून होतील. तिसऱ्ये पेटींतून काढण्याचा तऱ्हा ३ आहेत, ह्मणून पूर्वींचे तऱ्हांस यांतून एक एक जोडल्यानें ५×७×३ इतक्या काढण्याचा तऱ्हा पहिल्ये तीन पेट्यांपासून होतील; आणि याप्रमाणें पुढेंहि. या पुढील प्रतिज्ञा सहज सिद्ध करितां येतील, आणि त्यांसारिख्या दुसरे पक्षांविषयीं करितां येतील.

जर पेट्यांकडेस जाण्याचे क्रमापासून कांहीं फेर पडतो, आणि जर निरनिराळ्ये पेट्यांत अ, ब, क, ड, इत्यादि चकत्या आहेत, तर ४×२×३×१×अ×ब×क×ड, इतक्या निरनिराळ्या तऱ्हा आहेत. जर पहिल्या पेटींतून दोन चकत्या, दुसरींतून तीन चकत्या, तिसरींतून एक चकती आणि चवथींतून तीन चकत्या अशा काढायाचा असतील आणि जर पेट्यांचा क्रम मनांत आणिला नाहीं, तर चकत्या काढण्याचे तऱ्हांची संख्या.

$$\text{अ}\frac{\text{अ}-१}{२} \times \text{ब}\frac{\text{ब}-१}{२}\,\frac{\text{ब}-२}{३} \times \text{क}\times\text{ड}\frac{\text{ड}-१}{२}\,\frac{\text{ड}-२}{३} \text{ आहे.}$$

जर पेट्यांकडे जाण्याचा क्रम मनांत आणिला, तर वरचे पद्धतीस ४×३×२×१ यांणीं गुणिलें पाहिजे. जर पेट्यांतून काढण्याचे क्रमानें कांहीं फेर होतो, परंतु पेट्यांचे क्रमानें फेर होत नाहीं, तर संख्या

$$\text{अ}(\text{अ}-१)\text{ब}(\text{ब}-१)(\text{ब}-२)\text{क}\text{ड}(\text{ड}-१)(\text{ड}-२) \text{ आहे.}$$

न पेव्यांत निरनिराळ्या खुणा केलेल्या अ चकत्या ठेवण्याचे तऱ्हांची संख्या अचा न घात, अथवा $अ^{न}$ आहे, आणि या पक्षांत प्रत्येक पेटींत चकत्या ठेवण्याचा क्रम लक्षांत आणीत नाहीं. निरनिराळ्ये तऱ्हेनें खुणा केलेल्या चार चकत्या सात पेव्यांत ठेवायाचा आहेत. पहिली चक्की सातांतून कोणत्येहि पेटींत ठेविली असतां सात तऱ्हा होतील; त्याचप्रमाणें दुसरी चक्की सात पेव्यांत ठेवितां येईल; आणि पहिल्या सात तऱ्हांतून एक, दुसऱ्या सातांतील एकीशीं मिळविलीं असतां, त्यापासून ७×७ तऱ्हा होतील; तिसऱ्या चक्कीपासून या प्रत्येक तऱ्हेचा ७ निरनिराळ्या तऱ्हा होतात, आणि यामुळें सर्व मिळून ७×७×७ तऱ्हा होतात; आणि याप्रमाणें पुढेंहि. परंतु जर चकत्यांवर कांहीं खुणा नसल्या, तर हें कृत्य अगदीं निराळें होईल.

कांहीं संख्या दिल्या असतां त्यांपासून दुसरी एक संख्या किती तऱ्हांनीं करितां येईल, आणि यांत प्रत्येक मोजण्याची तऱ्हा निरनिराळी आहे असें मनांत आण. जसें, १+३+१ आणि १+१+३ ह्या ५ ही संख्या करण्याचा निरनिराळ्या तऱ्हा आहेत. एक संख्या जितक्या तऱ्हांनीं होती, त्याचे दुप्पट तऱ्हांनीं पुढील संख्या होईल. उदाहरण, ८ ही संख्या घे. जितक्या वेगवेगळ्या तऱ्हांनीं ७ ही संख्या करितां येईल त्या तऱ्हा मांडिल्या, तर प्रत्येक तऱ्हेचा शेवटील भाग एकानें वाढविला, अथवा प्रत्येक तऱ्हेचे शेवटास १ जोडिला, तर ८ ही संख्या करितां येईल. जसें, १+३+२+१ यापासून १+३+२+२, अथवा १+३+२+१+१ असें होईल; आणि याप्रमाणें ८ ही संख्या करण्याचा सर्व तऱ्हा सांपडतील; कारण, ८ करण्याची कोणती एक तऱ्हा, जशी, अ+ब+क+ड ही ७ करण्याचा अ+ब+क+(ड−१) यापासून निघाली असावी. आतां (ड−१) हे ०— आहे, ह्मणजे ड हा एक आहे आणि तो—आहे अथवा ड−१ ही बाकी रहाती ह्मणजे ती ड मध्यें १ उणा इतकी आहे. यावरून न संख्या करण्याचा $२^{न-१}$ इतक्या तऱ्हा आहेत. कारण १ करण्याची एक तऱ्हा आहे, २ करण्याचा २ तऱ्हा आहेत; यावरून रितिप्रमाणें ३ करण्याचा $२^{२}$ इतक्या तऱ्हा आहेत, ४ करण्याचा $२^{३}$ इतक्या तऱ्हा आहेत; आणि याप्रमाणें पुढेंहि.

१	१+१	१+१+१	१+१+१+१
			१+१+२
		१+२	१+२+१
			१+३
	२	२+१	२+१+१
			२+२
		३	३+१
			४

या कोष्टकापासून १,२,३, आणि ४ या संख्या करण्याचा तऱ्हा दिसतात. यावरून असें दिसतें कीं अ+ब करण्याचा तऱ्हा जेवढ्या आहेत, त्या अ करण्याचा तऱ्हांशीं ब चा तऱ्हा जोडून जेवढ्या होतात, तेवढ्यांचा दुप्पट आहेत; अ+ब+क करण्याचा तऱ्हा, अ करण्याचा तऱ्हांशीं बचा तऱ्हा आणि कचा तऱ्हा जोडून जेवढ्या होतात, त्यांचा चौपट आहेत, ही गोष्ट शिकणारानें शोधून काढावी. आणि याप्रमाणें पुढें. आणखी, अ + ब करितांना जा संख्यांची बेरीज घ्यावी लागती त्या तऱ्हांत कित्येकांत अ स्पष्ट असतो आणि कित्येकांत तो तसा असत नाहीं, आणि एका जातीचा जेवढ्या तऱ्हा तेवढ्याच दुसऱ्या जातीचा तऱ्हा असतात.

कांहीं विषमसंख्या दिल्या असतां, त्यांपासून दुसरी संख्या करण्याचे तऱ्हांची संख्या काढायाची आहे, प्रत्येक मोजण्याची तऱ्हा निरनिराळी आहे असें समजावें. याप्रमाणें न करण्याचा तऱ्हा जर अ आहेत आणि न+१ करण्याचा तऱ्हा ब आहेत, तर न+२ करण्याचा तऱ्हा अ+ब आहेत; कारण १० करण्याचे प्रत्येक तऱ्हेचे शेवटचा अंक २नीं वाढविल्यानें, अथवा ११ करण्याचे प्रत्येक तऱ्हेचे शेवटीं १ जोडिल्यानें विषम अंकांपासून १२ करण्याची प्रत्येक तऱ्हा होती. जसें १+५+३+१ यापासून १० होतात आणि या तऱ्हेपासून १+५+३+३ ही १२ करण्याची तऱ्हा उत्पन्न होती. परंतु ११ करण्याचे १+९+१ यातऱ्हेपासून, १२ करण्याची १+९+१+१ ही तऱ्हा उत्पन्न होती. यावरून १० आणि ११ करण्याचे तऱ्हांचे बेरिजे बरोबर १२ करण्याचे तऱ्हांची संख्या आहे. आतां केवळ एक

तऱ्हेनें १ होतो. आणि केवळ एक तऱ्हेनें २ होतात; यावरून १+१, अथवा २ तऱ्हांनीं ३ होतील, १+२, अथवा ३ तऱ्हांनीं ४ होतील. १,१,२,३,५,८,१३,२१,३४,५५,८९ इत्यादि या श्रेणींत प्रत्येक पद, त्याचे पूर्वींचे दोन पदांचे बेरिजे बरोबर आहे, ही श्रेणी घेतली तर, यांतील न पद, विषम संख्यांपासून न संख्या करण्याचा तऱ्हा दाखवील. जसें, ५५ तऱ्हांनीं १० ही संख्या होईल, ८९ तऱ्हांनीं ११ ही संख्या होईल.

मनें भागिल्या जातील अशा संख्यांपासून मक ही संख्या $२^{क-१}$ इतक्या तऱ्हांनीं होईल हें दाखिव, यांत क्रमाप्रमाणें मोजितात.

१ १ १ २ ३ ४ ६ ९ १३ १९ २८ इत्यादि
० १ ० १ १ १ २ २ ३ ४ ५ इत्यादि

या दोन श्रेण्यांतून पहिल्ये श्रेणींत तिसरे पदापुढलें प्रत्येक नवें पद, हें शेवटील पद आणि शेवटील दोन पदें सोडून तिसरें पद यांचे बेरिजेबरोबर आहे; दुसऱ्ये श्रेणींत तीन पदें सोडून शेवटील पदाचे पूर्वींचें एक पद आणि शेवटील पदाचे पूर्वींचें दुसरें पद, यांचे बेरिजे बरोबर प्रत्येक नवें पद आहे. यावरून जा संख्या ३ नीं भागिल्या असतां १ बाकी रहाती, अशा संख्यांनीं न संख्या करण्याचा तऱ्हा, पहिल्ये श्रेणींतील न पद दाखवितें, आणि जा संख्या ३ नीं भागिल्या असतां २ बाकी रहातात, अशा संख्यांनीं न संख्या करण्याचा तऱ्हा दुसरे श्रेणींतील न पद दाखवितें.

जर प्रत्येक क्रम निरनिराळी तऱ्हा आहे, तर कांहीं संख्या दिल्या असतां, त्यांपासून दुसरी संख्या किती तऱ्हांनीं होईल, हें सहज दाखवितां येईल. उदाहरण, ७ निरनिराळ्ये अंकांपासून वर सांगितल्याप्रमाणें १२ हे किती तऱ्हांनीं होतील. जर बारा एकं मांडिले, तर त्यांतील प्रत्येक दोन एकंमामध्यें एक अंतर अशीं ११ अंतरें आहेत. यावरून प्रत्येक शेवटाकडून साहा एकंमांत एक अंतराची रेघ याप्रमाणें साहा अंतरांचा रेघा करून त्यांचे आंतील एकंचे अंक एकत्र करून सात अंकापासून १२ होत नाहींत अशी एकहि तऱ्हा नाहीं. जसें, १+१+३+२+१+२+२ ही सात

अंकांपासून १२ करण्याची एक तऱ्हा आहे आणि ती या पुढीलप्रमाणें आहे,

१|१|१११|११|१|११|११

यांत ११ अंतरांतून पहिले, दुसरे, पांचवे, सातवे, आठवे, आणि दहावे अंतरांवर अंतरखुणा आहेत, यावरून सात अंकांपासून १२ हे किती तऱ्हांनीं करितां येतील, हें विचारणें ११ अंतरांमध्यें ६ अंतरखुणा किती तऱ्हांनीं करितां येतील, या विचारण्यासारखें आहे; अथवा ११ तून सहा सहांचे संयोग, अथवा निवडी किती होतील.

$\frac{११×१०×९×८×७×६}{१×२×३×४×५×६}$, अथवा ४६२ हें उत्तर.

न वस्तूंतून म वस्तू जितक्या तऱ्हांनीं काढितां येतात ती संख्या $म_न$ याणें दाखविली, तर

$न×\frac{न-१}{२}×\frac{न-२}{३}\cdots\frac{न-म+१}{म}$ एथपावेतों, याचा संक्षेप $म_न$ आहे. तर न+१ करण्यासाठीं म+१ ह्या संख्या किती तऱ्हांनीं एकत्र केल्या पाहिजेत, त्यांची संख्या $म_न$ दाखवितो. यावरून १२ करण्यासाठीं ७ अंकांची योजना करण्याची संख्या $६_{११}$ आहे, इतकें मात्र वर सिद्ध केलें. यावरून हें पुढील सिद्ध करून दाखविण्यास कांहीं अडचण नाहीं.

$$२^न=१+१_न+२_न+३_न \cdots\cdots +न_न$$

वरचा प्रश्नांत जे अंक कामांत घेतले आहेत त्यांत ० येत नाहीं. जसें, चार अंकांपासून ५ करण्याचा तऱ्हांत २+१+१+० अशी तऱ्हा येत नाहीं. अंकांचे संख्येमध्यें ० जमेस धरून ७ अंकांपासून १२ किती तऱ्हांनीं करितां येतील हें आतां विचारितों. अंकामध्यें ० न घेतां ७ अंकांपासून १९ करण्याचा जितक्या तऱ्हा आहेत, त्यांपेक्षां अधिक किंवा उण्या तऱ्हा वरचे उदाहरणांत नाहींत. ० जमेस धरिलें असतां १२ करण्याचा जा तऱ्हा आहेत, त्यांतून प्रत्येक तऱ्हा घेऊन, त्यांतील प्रत्येक अंक १ नें वाढविला, तर अंकांत शून्याची गणना नाहीं, अशी १९ करण्याची तऱ्हा उत्पन्न होईल. त्याचप्रमाणें अंकांत शून्याची गणना नाहीं अशी १९ ची तऱ्हा घेऊन, त्यांतील प्रत्येक अंकांतून १ वजा कर, ह्मणजे ० अंकांत जमेस आहे असी १२ करण्याची तऱ्हा निघेल. यावरून ०

जमेस असतां ७ अंकांपासून १२ करण्याचा तऱ्हांची संख्या $६_{१८}$ आहे, आणि ० जमेस असतां म संख्यांपासून न संख्या करण्याचे तऱ्हांची संख्या $(म-न)_{न+म-१}$ आहे.

वर सांगितलें तें पुढील प्रश्नाचे उलगडण्याप्रमाणें आहे; खुणांवांचून न चकत्या म पेट्यांत किती तऱ्हांनीं टाकितां येतील? आणि हें पुढील सहज सिद्ध करून दाखवितां येईल; ब पेट्यांतून एक किंवा अधिक पेट्या रिकाम्या ठेवून, त्यांत खुणावांचून अशा क चकत्या ठेवण्याची संख्या $(ब-१)_{ब+क-१}$ आहे. परंतु प्रत्येक पेटींत एक तरी चकती असावी, असें असल्यास $(ब-१)_{क-१}$ ही तऱ्हांची संख्या आहे; प्रत्येक पेटींत दोन चकत्या असाव्या असें असल्यास $(ब-१)_{क-ब-१}$; प्रत्येक पेटींत तीन चकत्या असाव्या असें असल्यास $(ब-१)_{क-२ब-१}$; आणि याप्रमाणें पुढें.

अंकांमध्यें ० जमेस असतां म समसंख्यांपासून न–म करण्याचे तऱ्हांचे संख्येचे बरोबर, म **विषम** अंकांपासून न करण्याचे तऱ्हांची संख्या आहे; ह्मणजे ० जमेस असतां म सम किंवा विषम अंकांपासून $\frac{१}{२}(न-म)$ करण्याचे तऱ्हांची संख्या वर सांगितल्याबरोबर आहे. यावरून $\frac{१}{२}(न-म)+म-१$, अथवा $\frac{१}{२}(न+म)-१$ इतक्या वस्तूंतून म–१ वस्तूंचे संयोगांचे संख्येबरोबर, म विषम संख्यां पासून न करण्याचे तऱ्हांची संख्या आहे. जर म आणि न हे दोन्हीं सम, किंवा दोन्हीं विषम नसतील, तर कृत्य अशक्य होईल.

न संख्यांतून म संख्या काढण्याचे तऱ्हांची संख्या $म_{न}$ हें सरळ पद दाखवितें, त्याचा योगानें संयोगांचे संख्यांमध्यें उपयोगी आणि चमत्कारिक संबंध आहेत, त्यांतून कांहीं सहज दाखवितां येतील. मनांत आण कीं १२ तून ५ काढावयाचे आहेत; त्या १२ वस्तूंवर अ,ब,क,ड, इत्यादि खुणा मांड आणि त्यांतून एक वस्तू अ एकीकडे ठेव. १२ तून ५ काढण्याचा प्रत्येक समुदायांत अ येतो किंवा येत नाहीं. अ येत नाहीं अशा समुदायांची संख्या $५_{११}$ आहे; आणि जांत अ येतो अशा समुदायांची संख्या $४_{११}$ अशी असावी, कारण अ खेरीज करून बाकीचे सर्व वस्तूंतून ४ काढण्याचे तऱ्हांची संख्या $४_{११}$ आहे. यावरून $५_{१२}$ हे $५_{११}+४_{११}$ असावे, आणि याप्रमाणें प्रत्येक पक्षांत सिद्ध करून दाखवितां येईल,

$$म_न = म_{न-१} + (म-१)_{न-१}$$

$०_न$ आणि $न_न$ हें दोन्हीं १ याचे बरोबर आहेत; कारण कांहीं न घेण्याची तऱ्हा एकच आहे, आणि सर्व घेण्याची तऱ्हा एकच आहे. पुनः $म_न$ आणि $(न-म)_न$ हीं दोन्हीं सारखींच आहेत. आणि जर नपेक्षां म मोठा आहे, तर $म_न=०$; कारण तसें करण्याची एकहि तऱ्हा नाहीं. पुढीलप्रमाणें लिहिलें असतां वर सांगीतले परिणामांतून एकादा परिणाम सरळ रूपाचा होईल, जसें,

$$२^न = ०_न + १_न + २_न + \cdots + न_न$$

न वस्तूंतून मचे संयोगांची संख्या $म_न$ आहे, आणि जा कोष्टकांतील न व्ये ओळींची $\overline{म+१}$ वी संख्या $म_न$ आहे, त्या कोष्टकाचीं चिन्हें मांडिलीं असतां तो कोष्टक करण्याचा नियम पुढीलप्रमाणें आहे, असें वर सिद्ध झालें हें दिसेल; प्रत्येक अंकाचे वरचा अंक आणि त्यावरचे अंकाचे मागला अंक, यांचे बेरिजेबरोबर तो पहिला अंक आहे. आतां

	०	१	२	३	इत्या०
१	$०_१$	$१_१$	$२_१$	$३_१$	इ०
२	$०_२$	$१_२$	$२_२$	$३_२$	इ०
३	$०_३$	$१_३$	$२_३$	$३_३$	इ०
इत्यादि	इ०	इ०	इ०	इ०	

१,१,०,०,०, इत्यादि ही पहिली आडवी ओळ आहे १,१,१, इत्यादि ही पहिली उभी ओळ आहे, यावरून कोष्टक या पुढीलप्रमाणें आहे आणि तो हवा तितका पुढें वाढवितां येईल;

	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९	१०
१	१	१	०	०	०	०	०	०	०	०	०
२	१	२	१	०	०	०	०	०	०	०	०
३	१	३	३	१	०	०	०	०	०	०	०
४	१	४	६	४	१	०	०	०	०	०	०
५	१	५	१०	१०	५	१	०	०	०	०	०
६	१	६	१५	२०	१५	६	१	०	०	०	०
७	१	७	२१	३५	३५	२१	७	१	०	०	०
८	१	८	२८	५६	७०	५६	२८	८	१	०	०
९	१	९	३६	८४	१२६	१२६	८४	३६	९	१	०
१०	१	१०	४५	१२०	२१०	२५२	२१०	१२०	४५	१०	१

जसें, ९ व्ये आडव्ये ओळींत जा ओळीचे डोक्यावर ४आहेत, त्या ओळींत १२६ हा अंक दिसतो, आणि तो ९×८×७×६÷ (१×२×३×४), अथवा ९ वस्तूंतून ४ वस्तू काढण्याचे तऱ्हांचे संख्येबरोबर आहे, आणि ही गोष्ट ४ चे खालीं ९, अथवा $४_९$ अशानें दाखवितात.

जर प्रत्येक आडव्ये ओळीची बेरीज घेतली, तर १+१ अथवा २, १+२+१, अथवा $२^२$, पुढली ओळ १+३+३+१ अथवा $२^३$ इत्यादि, यापासून वर सांगीतलेला सिद्धांत सिद्ध होतो; आणि कोष्टक करण्याचे नियमावरून उभ्या ओळी याप्रमाणें केल्या आहेत;

११	१२१	१३३१
११	१२१	१३३१
१२१	१३३१	१४६४१ इत्यादि.

यावरून प्रत्येक आडव्ये ओळीची बेरीज तिचे पूर्वीचे ओळीचे बेरिजेचे दुप्पट आहे. परंतु या करण्याचे कृतीचें फळ पुढें नेतां येईल. १+क्ष याचे घात बीजरूप गुणाकारानें केले, तर कृतीमध्यें क्षचेघातांचे अंकरूप गुणक करण्यांत, वरचे सारखीच वांकडी बेरीज करावी लागेल.

१+क्ष	$१+२क्ष+क्ष^२$
१+क्ष	१+क्ष
१+क्ष	$१+२क्ष+क्ष^२$
$क्ष+क्ष^२$	$क्ष+२क्ष^२+क्ष^३$
$१+२क्ष+क्ष^२$	$१+३क्ष+३क्ष^२+क्ष^३$

यांत १+क्ष याचा दुसरा आणि तिसरा घात आहे; आणि कोष्टकावरून चवथा घात सहज सांगतां येतो, आणि तो $१+४क्ष+६क्ष^२+४क्ष^३+क्ष^४$ आहे; याप्रमाणें पुढें. यावरून,

$(१+क्ष)^{न}=०_{न}+१_{न}क्ष+२_{न}क्ष^{२}+३_{न}क्ष^{३}+\cdots+न_{न}\ क्ष^{न}$, असें होतें आणि यांत बहुतकरून $०_{न}$, $१_{न}$, इत्यादि सर्व पदें लिहितात जसें,

$$(१+क्ष)^{न}=१+नक्ष+न\frac{न-१}{२}\ क्ष^{२}+न\ \frac{न-१}{२}\ \frac{न-२}{३}\ क्ष^{३}+\ इत्यादि.$$

बीजांत जास **द्वियुक्पद सिद्धांत** ह्मणतात, त्याचा हा एक सरळ पक्ष आहे. जर १+क्ष याचे ठिकाणीं क्ष+अ असें घेतलें, तर

$$(क्ष+अ)^{न}=क्ष^{न}+१_{न}अक्ष^{न-१}+२_{न}अ^{२}क्ष^{न-२}+३_{न}अ^{३}क्ष^{न-३}+\cdot\cdot+न_{न}अ^{न}$$

असें होईल. मागें सांगितलेला कोष्टक दुसऱ्ये रूपानें करितां येईल. एका आडव्या ओळींत पहिल्यानें १ आणि त्याचापुढें कांहीं शून्यें मांडून, नंतर दुसऱ्ये ओळीचा आरंभीं पहिल्या ओळीचा पहिला अंक मांड, नंतर त्याशीं पहिल्ये ओळीचा दुसरा अंक मेळीव ह्मणजे दुसऱ्ये ओळीचा दुसरा अंक होईल, याप्रमाणें शेवटील एक एक अंक सोडून सर्व ओळी पुऱ्या कर, ह्मणजे या पुढील्प्रमाणें होईल.

१	०	०	०	०	०	०
१	१	१	१	१	१	१
१	२	३	४	५	६	
१	३	६	१०	१५		
१	४	१०	२०			
१	५	१५				
१	६					
१						

या कोष्टकाचे तिर्कस ओळींत १ १, १ २ १, १ ३ ३ १, इत्यादि अंक आहेत, आणि मूळचे कोष्टकाप्रमाणेंच आहेत, आणि ते तशाच मिळवणीनें उत्पन्न झाले आहेत. वरचा कोष्टक उत्पन्न करण्यासाठीं ज्या मिळवण्या कराव्या लागतात, त्या करण्याचे पूर्वीं जर अनें गुणिलें असतें, तर १+अ याचा घाताचे निरनिराळे अवयव सांपडले असते, जसें,

१	०	०	०	०
१	अ	$अ^2$	$अ^3$	$अ^4$
१	२अ	$३अ^2$	$४अ^3$	
१	३अ	$६अ^2$		
१	४अ			
१				

या कोष्टकाचे विर्कस ओळींत १+अ, $१+२अ+अ,^2$ १+३अ+$३अ^2$+$अ^3$ इत्यादि, १+अ चे निरनिराळे घात आहेत. जर १,०,०, इत्यादि हे घेऊन आरंभ करण्याबद्दल प,०,०, इत्यादि घेतले, तर प्रत्येक उभ्ये ओळीचे शेवटीं प, प×४अ, प×$६अ^2$, इत्यादि आले असते; आणि प्रत्येक ओळीचे डोक्यावर $क्ष^4$,$क्ष^3$,$क्ष^2$,क्ष,१, हे मांडिले असते, तर प्रत्येक उभ्ये ओळीचे दोन शेवटांवरील पदें गुणून त्या सर्व गुणाकारांची बेरीज घेतल्यानें $प(क्ष+अ)^4$ यास विस्तारस्प देण्याचे अवयव सांपडले असते.

$प(क्ष+अ)^3+क(क्ष+अ)^2+र(क्ष+अ)+स$, याचें विस्तारस्प वर सांगीतले रितीप्रमाणें करितों.

$क्ष^3$	$क्ष^2$	क्ष	१	$क्ष^2$	क्ष	१	क्ष	१	१
प	०	०	०	क	०	०	र	०	स
प	पअ	$पअ^2$	$पअ^3$	क	कअ	$कअ^2$	र	रअ	
प	२पअ	$३पअ^2$		क	२कअ		र		
प	३पअ			क					
प									

$पक्ष^3+३पअक्ष^2+३पअ^2क्ष+पअ^3+कक्ष^2+२कअक्ष+कअ^2+रक्ष+रअ+स = पक्ष^3+(३पअ+क)क्ष^2+(३पअ^2+२कअ+र)क्ष+पअ^3+कअ^2+रअ+स$

आतां पहिल्या कृतींत क, र, आणि स यांस क्षचा योग्यघाताचे ठिकाणीं मांडिले असते, तर ही सर्व कृति एकदांच झाली असती जसें,

क्ष^3	क्ष^2	क्ष	१
प	क	र	स
प	पअ+क	पअ^2+कअ+र	पअ^3+कअ^2+रअ+स
प	२पअ+क	३पअ^2+२कअ+र	
प	३पअ+क		
प			

पुरवणीचा ११ व्या भागांत जी कृति सांगीतली ती हीच आहे, परंतु यांत शेवटील अक्षराचें चिन्ह बदलावें लागत नाहीं, आणि शेवटील ओळींत मिळवणीच्या बदल वजाबाकी करावी लागती, इतका मात्र यांत फेर आहे. अनेक बीजरूप पद्धतीमध्यें क्षचा जागीं क्ष+अ मांडण्याची ही एक सोईची कृति आहे. उदाहरण, २क्ष^5+क्ष^4+३क्ष^2+७क्ष+९ यांत क्षचा जागीं क्ष+५ मांडिले असतां रूप कसें होईल? ही पद्धती पूर्ण केली असतां या पुढीलप्रमाणें आहे,

२क्ष^5+	१क्ष^4+	०क्ष^3+	३क्ष^2+	७क्ष+	९
	१	०	३	७	९
२	११	५५	२७८	१३९७	६९९४
२	२१	१६०	१०७८	६७८७	
२	३१	३१५	२६५३		
२	४१	५२०			
२	५१				

उत्तर, २क्ष^5+५१क्ष^4+५२०क्ष^3+२६५३क्ष^2+६७८७क्ष+६९९४.

पुरवणी भाग अकरावा.

समीकरणें उलगडण्याची होर्नर साहेबाची रीति.

गणनेचे अभ्यासासाठीं ही रीति फार उपयोगी पडती, ह्मणून ती या अध्यायांत सांगीतली आहे. यांत जीं उदाहरणें सांगीतलीं आहेत, तीं उलगडण्यासाठीं बीजगणिताचे चिन्हाचा थोडासा उपयोग पडेल, आणि या ग्रंथांत बीजगणिताविषयीं जें सांगीतलें आहे, त्याची मात्र माहिती असली ह्मणजे हीं उदाहरणें समजतील.

$$२क्ष^{४}+क्ष^{२}-३क्ष=४१६७९३,$$

अथवा लिहिण्याचे चाली प्रमाणें

$$२क्ष^{४}+क्ष^{२}-३क्ष-४१६७९३=०,$$

असें समीकरण उलगडण्याचें असेल, तर पहिल्यानें अदमासानें मूळाचा पहिला अंक शोधून काढावा, इतकेंच केवळ नाहीं, परंतु त्या अंकाची जातहि शोधून काढावी. उदाहरण, जर तो पहिला अंक २ असला, तर तो २, अथवा २०, अथवा २०० इत्यादि, अथवा ·२ अथवा ·०२ अथवा ·००२ इत्यादि यांतून कोणत्ये जातीचा आहे हें जाणिलें पाहिजे. हेंहि अदमासानें कळेल; आणि अदमास करण्याचा सुलभ मार्ग या पुढीलप्रमाणें आहे; दिलेली पद्धती तिचे पूर्णरूपानें मांड. वरचे पक्षांत पद्धतीचें रूप पूर्ण नाहीं, आणि तिचें पूर्ण रूप हें पुढील आहे.

$$२क्ष^{४}+०क्ष^{३}+१क्ष^{२}-३क्ष-४१६७९३.$$

जेव्हां क्ष कांहीं संख्या आहे, ह्मणजे जसें, ३००० आहे, तेव्हां या पद्धतीची किंमत काढण्यासाठीं, पहिल्यानें पहिला गुणक (२) घेऊन त्यास ३००० यांणीं गुणावें, नंतर दुसरा गुणक (०) घेऊन त्यांत मिळवावा, आणि त्या उत्तरास ३००० यांणीं गुणावें, आणि त्यांत दुसरा गुणक (१) मिळवावा, याप्रमाणें पुढें करीत जावें. जसें,

$२ \times ३००० + ० = ६०००$; $६००० \times ३००० + १ = १८००००१$

$१८००००१ \times ३००० - ३ = ५४००००२९९७$

$५४००००२९९७ \times ३००० - ४१६७९३ =$

$१६२००००८५७४२०७.$

आतां क्ष=३० अशी कल्पना करून त्याची किंमत काढ. तर या पुढील प्रमाणें वेगळालीं पदें निघतील, ह्मणजे, ६०, अथवा (२×३०+०), १८०१, ५४०२७, आणि शेवटीं,

$१६२०८१० - ४१६७९३,$

अथवा क्ष=३० केल्यानें पहिलीं पदें ४१६७९३ यापेक्षां अधिक आहेत. आतां क्ष=२० असें घेऊन पाहिलें असतां, याप्रमाणें होईल, ह्मणजे ४०,८०१,१६०१७, आणि शेवटीं,

$३२०३४० - ४१६७९३,$

अथवा क्ष=२० केल्यानें पहिलीं पदें ४१६७९३ यांपेक्षां कमी आहेत. आतां $२क्ष^४+क्ष^२-३क्ष$ यांस ४१६७९३ यांचे बरोबर असायासाठीं, क्षची किंमत २० आणि ३० यांचेमध्यें असावी. ह्मणून कृतीचे आरंभीं ही गोष्ट सिद्ध केली पाहिजे.

इतकें जाणल्यानंतर, +२,०,+१,−३, आणि −४१६७९३ हे गुणक त्यांचे बीजगणित चिन्हांसहित मांडावे, परंतु शेवटल्याचें चिन्ह बदलून मांडावें. जेव्हां शेवटील चिन्ह−आहे, तेव्हां वर सांगीतल्याप्रमाणें करायास सोईस पडतें. परंतु शेवटील चिन्ह+असलें, तर त्याचे पूर्वींचे गुणकांचीं चिन्हें बदलून तें शेवटील चिन्ह तसेंच ठेविल्यानें सोईस पडतें. जसें, $क्ष^३-१२क्ष+१=०$, हें समीकरण उलगडायास याप्रमाणें मांडितात.

$-१ \quad ० \quad +१२ \quad १$

परंतु पूर्वींचे उदाहरणांत याप्रमाणें मांडिलें पाहिजे,

$+२ \quad ० \quad +१ \quad -३ \quad ४१६७९३,$

याप्रमाणें केल्यानंतर वर ठरविलेला मूळाचा मोठा अंक घे, तो या पक्षांत २ दशक, किंवा २० आहे, असें आरंभींचे कृतीपासून कळलें. वरचे ओळींतील डावेकडील पहिलें पद २० नीं गुणून, त्यांत दुसरें पद मिळवून, ती बेरीज दुसऱ्ये पदाखालीं मांड; नंतर अशी आलेली रकम २० नीं गुणून त्या गुणाकारांत तिसरें पद मिळवून, ती बेरीज तिसऱ्ये पदाखालीं मांड; आणि याप्रमाणें पुढें कर. परंतु शेवटील पदाशीं आल्यावर, पूर्वींचे पदास २० नीं गुणून जो गुणाकार होतो, तो शेवटील पदांतून वजा करावा, अथवा त्या गुणाकाराचें चिन्ह बदल करून, त्यास शेवटील पदाशीं जोडून मांडावें. असें केल्यानंतर शेवटील पद किंवा वजाबाकीचें पद सोडून, बाकी ओळीचे अंकांशीं कृति कर; नंतर शेवटील दोन ओळी वांचून बाकीचे ओळींशीं कृति कर, आणि याप्रमाणें ओळींची स्थिती खालीं दाखविल्याप्रमाणें होईपर्यंत कर;

अ	ब	क	ड	इ
	फ	ग	ह	ऐ
	के	ल	म	
	न	ओ		
	प			

हीं पदें काढण्याची रीति पुढीलप्रमाणें आहे;

फ = २०अ+ब, ग =२०फ+क, ह=२०ग+ड, ऐ=इ−२०ह,
के = २०अ+फ, ल =२०के+ग, म=२०ल+ह,
न = २०अ+के, ओ=२०न+ल,
प = २०अ+न,

ही कृति होर्नर साहेबांनीं काढल्यावरून तीस **होर्नर साहेबाची कृति** ह्मणतात. आतां ही कृति वरचे उदाहरणाचे अंकांवर लाविली असतां याप्रमाणें होईल;

४०	८०१	१६०१७	९६४५३
८०	२४०१	६४०३७	
१२०	४८०१		
१६०			

यावरून पुढें कृति चालविण्यास ही पुढील अंकांची ओळ आहे,

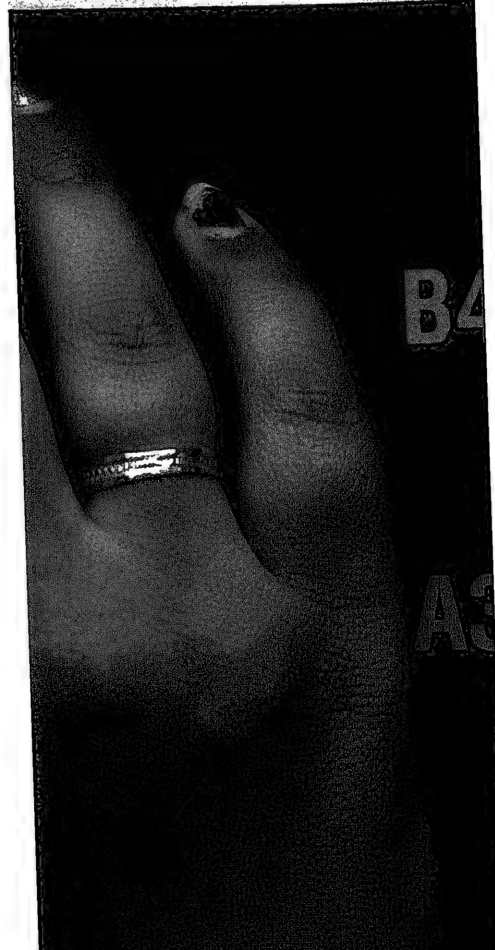
२ १६० ४८०१ ६४०३७ ९६४५३

या ओळीचे अंकांपासून मूळाचा दुसरा, अथवा एकंचा अंक काढण्याविषयीं तर्क करितां येईल.

शेवटचे उजवेकडील अंकास **भाज्य** असें ह्मण, त्याचा डावेकडील पदास **भाजक** ह्मण, बाकीचे डावेकडील सर्व पदांस **अग्रसर** ह्मण. भाज्यांत भाजक किती वेळा जातो हें पहा; यावरून जो भागाकार येईल तो, दुसरे अंकाचे कल्पनेकरितां घेतां येईल. जर होर्नरची कृति लावल्यावर, पूर्वींचे, अथवा एकंचे स्थळींचे अंकाचे कृतीनें तो भाजक वाढविलेला असून, जर तितके वेळा भाज्यांत जातो, तर हा कल्पिलेला अंक खरा आहे. उदाहरण, वरचे पक्षांत ९६४५३ यांत ६४०३७ हे एक वेळा जातात; तर १ हा अंक खरा आहे किंवा नाहीं हें तपासून पहा. हा अंक खरा आहे असें होर्नरचे कृतीपासून दिसतें, आणि कृतीची ही दुसरी पायरी पुढीलप्रमाणें आहे,

२	१६०	४८०१	६४०३७	९६४५३	(१
	१६२	४९६३	६९०००	२७४५३	
	१६४	५१२७	७४१२७		
	१६६	५२९३			
	१६८				

याप्रमाणें इच्छिल्ये मूळाचा पूर्ण भाग काढल्यावर, त्याचा अपूर्ण भाग काढायासाठीं कृतीचें रूप सुलभ होतें.



सांगितलें समीकरण चवथ्या वर्णाचें आहे ह्मणून, भाज्य अंकावर चार शून्यें मांड, भाजकावर तीन शून्यें, त्याचे डावेकडल्या जवळच्या अग्रसरावर दोन शून्यें, त्याचे डावेकडल्यावर एक शून्य, आणि पहिलें पद तसेंच ठेवावें ; नंतर पूर्वीप्रमाणें नवे भाज्य आणि भाजकापासून भागाकाराचा नवा अंक काढून, तो अंक घेऊन हॉर्नरचा कृतीप्रमाणें पुढें चालावें. पुनः जीं पदें निघतात, त्यांस वर सांगितल्याप्रमाणें शून्यें जोडून त्यांशीं पुनः कृति करून, भागाकाराचा पुढला अंक काढावा; आणि याप्रमाणें पुढेंहि. अशा तऱ्हेनें शून्यें लाविलीं असतां दशांश चिन्हाची कांहीं गरज पडत नाहीं, आणि त्यापासून भागाकारांतील वेगवेगळ्ये अंकस्थळांचे किमतीचा विचार करावा लागत नाहीं. पूर्वी वर्गमूळ काढण्याची संक्षेप रीति सांगितली त्याप्रमाणें यांत, जेथून संक्षेप करावा लागतो, त्याचे पूर्वीचीं इच्छिलेलीं स्थळें काढण्याची सर्व कृति पुढें दाखविली आहे. त्यांत दशांशाचे एक स्थळापर्यंत कृति केली आहे.

२	०	१	–३	४१६७९३ (२१·३
	४०	८०१	१६०१७	९६४५३
	८०	२४०१	६४०३७	२७४५३००००
	१२०	४८०१	६९०००	४७३३९७७८
	१६०	४९६३	७४१२७०००	
	१६२	५१२७	७५७३००७४	
	१६४	५२९३००	७७३४८३७६	
	१६६			
	१६८०	५३४३५८		
	१६८६	५३९४३४		
	१६९२	५४४५२८		
	१६९८			
	१७०४			

किती अधिक येतील तें जाणलें असतां बरें. संक्षेप करतेसमयीं भाजकांत जितकीं अंकस्थळें आहेत, तितकीं स्थळें मूळांत येतील, कदाचित् एक किंवा दोन स्थळें कमीहि येतील, असा निश्चय करितां येतो. जसें, वरचे उदाहरणाचे शेवटील भाजकांत आठ अंकस्थळें आहेत, त्यापासून संक्षेप केल्यानें निदान सहा स्थळें तरी येतील. संक्षेपाचा आरंभ करायासाठीं, भाज्यास तसाच राहूं दे, भाजकाचे उजवेकडचा एक अंक काप, त्याचे पूर्वीचे पदाचे उजवेकडून दोन अंक काप, त्याचे पूर्वीचे पदाचे उजवेकडून तीन अंक काप, आणि याप्रमाणें पुढेंहि. या तऱ्हेनें संक्षेपाचा आरंभ करतेसमयीं ही पुढील ओळ येईल,

|०००२ १|७०४ ५४४५|२८ ७७२४८३७|६ ४७३३९७७८

यांतून पहिलें पद अगदीं निरूपयोगी आहे. जे डावेकडचे अंक रेघेनें कापले नाहींत, ते मात्र घेऊन पूर्वींप्रमाणें कृति कर. कृति करतेसमयीं कापलेल्ये अंकांतून दुसऱ्ये अंकांचे हातचे घेऊन, कापलेला पहिला अंक कृति करण्यांत घ्यावा. यावरून या पुढीलप्रमाणें होईल;

१|७०४ ५४४५|२८ ७७३४८३७|६ ४७३३९७७८ (६
५४५५|५ ७७६७५७०|६ ७३४३५४
५४६५|७ ७८००३६४|८
५४७५|९

दुसऱ्यानें संक्षेप करतेसमयीं, पहिलें पद १|७०४ हें, |००१७०४ असें होतें, आणि यामुळें तें अगदीं निरूपयोगी होतें. दुसरी पायरी निराळी मांडिली असतां याप्रमाणें होईल, परंतु ती या पक्षांत उपयोगी नाहीं.

५४|७५९ ७८००३६|४८ ७३४३५४ (०

एथें ७३४३५४ या भाज्यांत ७८००३६ हा भाजक जात नाहीं, ह्मणून मूळाचे अंकांत ० मांडून दुसरा संक्षेप करावा.

```
|५४७५९   ७८००३|६४८    ७३४३५४  (९
          ७८००८|५       ३२२७७
          ७८०१३|४
```

पुढील संक्षेप करितानां पहिलें पद | ००५४७५९ असें होतें, यामुळें तें निरूपयोगी होतें, ह्मणून बाकीची कृति केवळ संक्षेप भागाकाराप्रमाणें करावी इतकें मात्र बाकी राहिलें.

```
७८०१|३४)३२२७७(४१३७
           १०७२
            २९२
             ५८
              ३
```

आणि २१·३६०९४१३७ हें इच्छिलें मूळ, अथवा क्षची किंमत आहे.

आतां एका समीकरणाची सर्व कृति पुढें करून दाखवितों, त्या समीकरणाचें एक मूळ ३ आणि ४ यांचामध्यें आहे. तें समीकरण याप्रमाणें आहे;

$$क्ष^{3}-१०क्ष+१=०$$

३	−१	२०००	९९०७९६
६	× १७००	२०९०००	
× ९०	१७९१	१९७६९०००	
९१	× १८८३००	७४३३६९००००००	
९२	१८९२३१	१७२३११७१०२७३०००	
× ९३०	× १९०१६३००		९९१२४७४४७६८१
९३१	१९०२५६३१		३९४६२८७५४२०
९३२	× १९०३४९६३००००		१३९१४९१५५९
× ९३३०	१९०३५२४२९९०९		५८९९३१२३
९३३१	× १९०३५५२२९८२७००		१८८६०४७
९३३२	१९०३५६०६९८०५ ९ १		१७२८३५
× ९३३३००×	१९०३५६९०९७८५ ६ ३		१५१५
९३३३०३	१९०३५६९१४४५२ २ ८		१८३
९३३३०६	१९०३५६९१९११ ८ ८ ३		१२
× ९३३३०९०	१९०३५६९१९३० ६ ३		१
९३३ ३०	९९१९०३५६९१९४९ ३ ९		
९३३ ३१	०८...........		
×०९ ३३ ३१	१७		

जे अंक एकाखालीं एक वारंवार येतात ते मांडण्याची गरज नाहीं; जसें, १९०३५६ हे अंक वारंवार प्रत्येक ओळींत येतात, ह्मणून ते मांडण्याचें प्रयोजन नाहीं. परंतु ते सोडले असतां किती सुलभ पडेल, याविषयीं शिकणारानें स्वतां विचार करावा. याविषयीं वर सर्व कृति करून दाविली आहे.

हीं पुढील उदाहरणें अभ्यासाकरितां उपयोगी पडतील;

१. २क्ष^3−१००क्ष−७=० क्ष=७·१०५८११३३.
२. क्ष^4+क्ष^3+क्ष^2+क्ष=६००० क्ष=८·५३१४३७७२६.
३. क्ष^3+३क्ष^2−४क्ष−१०=० क्ष=१·८९५६९४९१६५०४.
४. क्ष^3+१००क्ष^2−५क्ष−२१७३=० क्ष=४·५८२२४६०७१०५८४६४.
५. $\sqrt[3]{२}$=१·२५९९२१०४९८९४८७३१६४७६७२१०६०७२७८.*
६. क्ष^3−६क्ष=१०० क्ष=५·०७१३५१७४८७३१.
७. क्ष^3+२क्ष^2+३क्ष=३०० क्ष=५·९५५२५९६७१२२३९८.
८. क्ष^3+क्ष=१००० क्ष=९·९६६६६६७९.
९. २७०००क्ष^3+२७०००क्ष=२६९९९९९९ क्ष=९·९६६६६६६६ . . . .
१०. क्ष^3−६क्ष=१०० क्ष=५·०७१३५१७४८७.
११. क्ष^5−४क्ष^4+७क्ष^3−८६३=० क्ष=४·५१९५५०७.
१२. क्ष^3−२०क्ष+८=० क्ष=४·६६००३७६९३०००८७३७८.
१३. क्ष^3+क्ष^2+क्ष−१०=० क्ष=१·७३७३७०२३३.
१४. क्ष^3−४६क्ष^2−३६क्ष+१८=० क्ष=४६·७६१६३०१८४७, अथवा क्ष=·३४७१६२३१९२.
१५. क्ष^3+४६क्ष^2−३६क्ष−१८=० क्ष=१·१०८७९२५०३७.
१६. ८९९१क्ष^3−१६२८२८क्ष^2+७४६२७१क्ष−८१०००=० क्ष=·१११२२२३३३४४४५५५ . . . . .
१७. ७२९क्ष^3−४८६क्ष^2+९९क्ष−६=० क्ष=·१११ . . ., अथवा ·२२२ . . ., अथवा ·३३३ . . .
१८. २क्ष^3+ ३क्ष^2−४क्ष=५०० क्ष=५·९३४८१७९६२३१५१५२७९.

* पृथकरण क्ष^3+०क्ष^2+०क्ष−२=०

१९. क्ष^{३}+२क्ष^{२}+क्ष−१५०=० क्ष=४·६६८४०९०१४५५४१९८३२५३७४२९९१२०१७०५८९९.

२०. क्ष^{३}+क्ष=क्ष^{२}+५०० क्ष=८·२४०९६३५५८१४४८५८५२६९६३.

२१. क्ष^{३}+२क्ष^{२}+३क्ष−१००००=० क्ष=२०·८५२९०५५२६००९.

२२. क्ष^{४}−४क्ष−२०००=० क्ष=४·५८१४००३६२.

२३. १०क्ष^{३}−३२क्ष^{२}−११क्ष−१००=० क्ष=४·१४६७९७८०८५८४२७८७८५.

२४. क्ष^{४}+क्ष^{३}+क्ष^{२}+क्ष=१२७६९४ क्ष=१८·६४४८२३७३०९५.

२५. १०क्ष^{३}+११क्ष^{२}+१२क्ष=१००००० क्ष=२१·१६५५९९५५५४५०८८०५.

२६. क्ष^{३}+क्ष=१३ क्ष=२·२०९७५३३०१२०८८४९.

२७. क्ष^{३}+क्ष^{२}−४क्ष−१६००=० क्ष=११·४८२८३७१५७.

२८. क्ष^{३}−२क्ष=५ क्ष=२·०९४५५१४८१५४२३२६५९१४८२३८६५४०५७९३०२९६३८५७३०६१०५६२८

२९. क्ष^{४}−८०क्ष^{३}+२४क्ष^{२}−६क्ष−८०३७९६३९=० क्ष=१२३.

३०. क्ष^{३}−२४२क्ष^{२}−६३१५क्ष+२५७७०९६=० क्ष=१२३.

३१. २क्ष^{४}−३क्ष^{३}+६क्ष−८=० क्ष=१·४१४२१३५६२३७३०९५०४८८०३.

३२. क्ष^{४}−१९क्ष^{३}+१३२क्ष^{२}−३०२क्ष+२००=० क्ष=१·०२८०४, अथवा ४, अथवा ६·५७६५३, अथवा ७·३९५४३

३३. ७क्ष^{४}−११क्ष^{३}+६क्ष^{२}+५क्ष=२१५ क्ष=२··७०६४८०४९३८५७९१.

३४. ७क्ष^{५}+६क्ष^{४}+५क्ष^{३}+४क्ष^{२}+३क्ष=११ क्ष=·७७०७६८८१९६२२६५८५२२३७९२९६५०५.

३५. ४क्ष^{६}+७क्ष^{५}+९क्ष^{४}+६क्ष^{३}+५क्ष^{२}+२क्ष=७९२.

क्ष=२·०५२०४२१७६८७९६०५३६५२११४०४३४०१२८१२०१९७३४६०२७५५९९५४५५४१७२४२

३६. २१८७क्ष^{४}−२४३०क्ष^{३}+९४५क्ष^{२}−१५०क्ष+८=० क्ष=·१११९··,अथवा·२२२२··,अ०·३३३३··,अ०·४४४४··

भूमितीला अंकगणित लावण्याचा रितींविषयीं.

शिकणारा भूमितीचें प्रसिद्ध शब्दांशीं माहीत झाला असतां, त्यास या पुढील रिती समजण्यास सुलभ पडेल. त्यांत जेव्हां कोणी एक रेघ दुसऱ्ये रेघेनें गुणायाची असें येतें, तेव्हां एका रेघेंत जितके एक जातीचे एकं आहेत, जसें, फुट, इंच, इत्यादि, तितक्या वेळा दुसऱ्ये रेघेंतील त्याच जातीचे एकं घेण्याचे आहेत असें समजावें. परंतु दुसरे अर्थानें पाहिलें असतां, एक परिमाण दुसऱ्ये परिमाणानें गुणायाचें आहे असें ह्मणणें अयोग्य आहे. सारख्ये जातीचीं सर्व परिमाणें सारिख्ये जातीचा एकंमानीं दाखविलीं पाहिजेत. जसें, फुटी आणि फुटीचे दशांश, अथवा इंच आणि इंचाचे दशांश, यांणीं सर्व रेघा दाखवाव्या. आणि जा जातीचे एकंमानें लांबी दाखविलेली असती त्याच जातीचे चौरस एकंमानीं क्षेत्र दाखविलें जातें; आणि त्याच जातीचे एकंमानीं घन, अथवा भरींव दाखविलें जातें. हें समजल्यावर या पुढील रिती सर्व जातीचे एकंमांस लागू होतील.

काटकोनचौकोनाचें क्षेत्रफळ करायाची रीति. जा दोन बाजू एकत्र मिळतात, त्यांतील एकं परस्पर गुण, अथवा जा दोन बाजू एकत्र मिळतात त्या परस्पर गुण; जो गुणाकार येईल तितके चौरस एकं क्षेत्रांत आहेत. जसें, जर ६ फुटी आणि ५ फुटी अशा दोन बाजू आहेत, तर क्षेत्र फळ ६×५, अथवा ३० चौरस फुटी आहे. त्याचप्रमाणें जा चौरसाची बाजू ६ फुटी आहे, त्याचें क्षेत्रफळ ६×६, अथवा ३६ चौरस फुटी आहे. (२३४).

समांतर रेघ चौकोनाचें क्षेत्रफळ करायाची रीति. एक बाजू आणि तिचे समोरचे बाजूचें लंबांतर हीं परस्पर गुण; तो गुणाकार क्षेत्रफळांतील चौरस एकंमा बरोबर होईल.

त्रापीज्यायदाचें* क्षेत्र फळ करायाची रीति. जा दोन रेघा समांतर नसतात, त्यांतून एकीचे मध्यापासून दुसरीवर लंब करून, त्या लंबानें ती दुसरी रेघ गुणून; जो गुणाकार येईल तें उत्तर होईल.

---

* ही चार बाजूंची आकृती आहे, त्यांतील समोरासमोरचा दोन बाजू समांतर असतात. आणि दुसऱ्या समांतर नाहींत.

वर तिचे समोरचे कोनापासून लंब करून, त्याच बाजूनें तो लंब गुणून, त्या गुणाकाराचें अर्ध क्षेत्रफळ होईल. अथवा, तीन बाजूंचे लांब्यांची बेरीज घेऊन तिचें अर्ध करावें, नंतर या अर्धांतून तीन बाजूंचा लांब्या वेगळाल्या वजा कराव्या, नंतर या तीन बाक्या व अर्ध बेरीज हीं परस्पर गुणून, गुणाकाराचें वर्गमूळ काढावें. तें मूळ त्या त्रिकोणाचे क्षेत्रांतील चौरस एकंमांची संख्या होईल; याची दुप्पट करून ती कोणतेहि बाजूचे लांबीनें भागिली, तर भागाकार त्याच बाजूचे समोरचे कोनाचें लंबांतर होईल.

जें वर्तुळ त्रिकोणाचे तीनहि बाजूंस आंतून स्पर्श करितें, त्याची त्रिज्या काढायाची रीति. वर सांगीतल्याप्रमाणें त्रिकोणाचें क्षेत्रफळ काढून, त्यास त्रिकोणाचे सर्व बाजूंचे अर्ध बेरिजेनें भाग, जो भागाकार येईल तें उत्तर.

काटकोनत्रिकोणाचा दोन बाजू दिल्या असतां, कर्णरेघ काढायाची रीति. दोन बाजूंचे वर्ग करून त्यांची बेरीज घ्यावी, आणि तिचें वर्ग मूळ काढावें तें उत्तर होईल.

काटकोनत्रिकोणाचा कर्ण आणि एक बाजू दिली असतां, दुसरी बाजू काढायाची रीति. दिलेल्ये दोन बाजूंचे बेरजेस त्यांचे वजाबाकीनें गुणून गुणाकाराचें वर्गमूळ काढ.

वर्तुळाचे त्रिज्येपासून जवळ जवळ परिघ काढायाची रीति. दुप्पट त्रिज्या, अथवा व्यास यांस ३·१४१५९२७ यांणीं गुण, गुणाकारांत इच्छेप्रमाणें दशांशस्थळें घे. जवळ येण्यासाठीं व्यासाला २२ नीं गुणून ७ नीं भाग. दशांश सोडून बरोबर उत्तर येण्यासाठीं, व्यासाला ३५५ नीं गुणून ११३ नीं भाग. (१३१) कलमांतील शेवटील उदाहरण पहा.

वर्तुळाची त्रिज्या आणि सेक्टोराचा कोन, हीं दिली असतां वर्तुळाचे सेक्टोराची लांबी काढायाची रीति. कोनाचे मापास विकळांचें*

---

*काटकोनाचे बरोबर ९० भाग केले असतात त्यास अंश ह्मणतात, प्रत्येक अंश बरोबर ६० भागांत विभागलेला असतो, त्यास कळा ह्मणतात, एक कळेचे बरोबर ६० भाग केले असतात, त्यास विकळा ह्मणतात. २° १५′ ४०″ याचा अर्थ, २अंश, १५कळा, आणि ४० कळा असें समजावें.

रूप देऊन, त्यांस त्रिज्येनें गुण आणि तो गुणाकार २०६२६५ यांणीं भाग, जो भागाकार येईल तितके एकं त्याचे कौंसाची लांबी होईल.

वर्तुळाची त्रिज्या दिली असतां त्याचें जवळ जवळ क्षेत्रफळ करायाची रीति. त्रिज्येचा वर्ग ३·१४१५९२७ यांणीं गुण.

वर्तुळाची त्रिज्या आणि सेकतोराचा कोन दिला असतां, सेक्तोराचें क्षेत्रफळ करायाची रीति. कोनाचे मापास विकळांचें रूप देऊन, त्यास त्रिज्येचे वर्गानें गुण आणि तो गुणाकार २०६२६५×२, अथवा ४१२५३० यांणीं भाग, जो भागाकार येईल तें क्षेत्रफळ होईल.

काटकोन भरीवाचें घनफळ करावयाची रीति. ज्या तीन बाजू एकत्र मिळतात, त्या परस्पर गुण, तो गुणाकार त्याचे घन एकं होतील. जर आकृती काटकोन नसली, तर तिचे कोणत्येहि एक बाजूचें क्षेत्रफळ करून, तें त्या बाजू पासून तिचे समोरचे बाजूचे लंबांतरानें गुणावें, तो गुणाकार त्या समांतर भरीवाचे घन एकं होतील.

शंकुचें घनफळ करायाची रीति. पायाचें क्षेत्रफळ करून तें शंकूचें लंब उंचीनें गुणावें, आणि तो गुणाकार ३ नीं भागावा.

पृज्यमाचें घनफळ करावयाची रीति. पायाचे क्षेत्रफळास दोन तोंडांचे लंबांतरानें गुणावें.

गोलाचें पृष्ठफळ करावयाची रीति. त्रिज्येचा वर्गाची चौपट ३·१४१५९२७ यांणीं गुणावी.

गोलाचें घनफळ करावयाची रीति. त्रिज्येचा घन करून त्यास ३·१४१५९२७×$\frac{३}{४}$, अथवा ४·१८८७९ यांणीं गुणावें.

सरळ शंकूचें पृष्ठफळ करायाची रीति. पायाची परिमिती बाजूचे तिर्कस उंचीनें गुणून, त्या गुणाकाराचें अर्ध उत्तर होईल. **अशा शंकूचें घनफळ करायासाठीं,** पायाचें क्षेत्रफळ लंबउंचीनें गुणून गुणाकाराचा एक तृतीयांश उत्तर होईल.

सरळ शिलिंदराचें पृष्ठफळ करायाची रीति. पायाचा परिघ उंचीनें गुणावा, तो गुणाकार उत्तर होईल. **त्याच घनफळ करायासाठीं** पायाचे क्षेत्रफळास उंचीनें गुणावें.

जेव्हां कांहीं पदार्थांचें घनफळ माहीत असतें, आणि जर त्या पदार्थांचा एक घन इंच किंवा एक घन फुट याचें वजन माहित असल्यास, त्यावरून त्या सर्व पदार्थांचें वजनहि काढितां येईल. परंतु निरनिराळ्ये

राळी वजन त्यांतील एकाद्या पदार्थाचे वजनाशीं जें प्रमाण ठेवितात, त्याप्रमाणाचे कोष्टक केले असतात. तो पदार्थ बहुतकरून, शुद्धपाणी असें ठरविलें आहे, आणि पाण्याचे वजनाशीं दुसऱ्ये पदार्थाचे वजनाचे प्रमाणास **स्पिसिफिक्ग्राविटि** ह्मणतात. जसें, सोन्याची स्पिसिफिक्ग्राविटि १९·३६२ आहे, अथवा शुद्धपाण्याचे एक घन फुटीचे वजनाचे १९·३६२ पट, सोन्याचे एक घन फुटीचें वजन आहे. एक सोन्याचे गोळ्याची त्रिज्या ४ इंच आहे, आणि त्याचें वजन किती आहे हें जाणायाचें आहे. या गोळ्याचें घनफळ ४×४×४×४·१८८८, अथवा २६८·०८३२ घन इंच आहे; आणि जापेक्षां (२१७) प्रमाणें एक घन इंच पाण्याचें वजन २५२·४५८ ग्रेन आहे, यावरून सोन्याचे प्रत्येक घनइंचाचें वजन २५२·४५८×१९·३६२, अथवा ४८८८·०९१ ग्रेन आहे; यावरून सोन्याचे २६८·०८३२ घन इंचांचें वजन २६८·०८-३२×४८८८·०९१ ग्रेन, अथवा त्रायचे २२७½ पौंड जवळजवळ आहे. रसायण शास्त्राचे आणि यंत्र शास्त्राचे बहुतेक ग्रंथांत स्पिसिफिक्ग्राविटीचे कोष्टक असतात.

पाण्याचे एक घन फुटींत त्रायचे ९०८·८४८८ औंस, अथवा ७५·७३७४ पौंड आहेत, अवाड्युपाईसचे ९९७·१३६९६९१ औंस, अथवा ६२·३२१०६०६ पौंड आहेत. साधारण कामाविषयीं एक घन फुट पाण्याचें वजन १००० औंस धरलें तरी चालेल, तेणेंकरून स्पिसिफिक् ग्राविटीचे कोष्टकाचें साधारण रूप होतें. जसें, जेव्हां एकाद्ये पदार्थाची स्पिसिफिक्ग्राविटि ४·११७२ आहे असें जेव्हां आढळतें, तेव्हां त्या पदार्थाचे एक घन फुटीचें वजन ४११७ औंस आहे असें समजावें. यापेक्षां खरें उत्तर येण्यासाठीं या आलेल्ये उत्तरांतून प्रत्येक हजार भागांबद्दल २ भाग वजा करावे.

समाप्त.

शुद्धिपत्र.

पृष्ठ.	ओळ	अशुद्ध.	शुद्ध.
७	२६	अंकाविषयीं	अंकाविषयीं
८	२०	अंकाची	अंकाची
११	७	अंकाचे	अंकाचे
४७	२७	जागी	जागीं
६४	३	१८,२९,२०	१८,१९,२०
	७	लाधारण	साधारण
६९	८	$\frac{५}{६}$	$\frac{६}{८}$
७०	२६	$\frac{६}{१०००}$	$\frac{९}{१०००}$
७२	१३	$\frac{१७२३०१०७}{१००००}$	$\frac{१७२३०२०७}{१००००}$
	१५	जाचें छेदस्थळीं	जाचे छेदस्थळीं
७९	१०	पडण्याकरितां	पहाण्याकरितां
	११	(२१२)	(११२)
८९	९	·०२=·००८	·०२+·००८
९७	१२	·०७८१२५	·००७८१२५
१०६	३०	२६०१	२०६१
१०७	१९	दशाशस्थळें	दशांशस्थळें
१०७	२१	आरंभी	आरंभीं
१०९	१६	गुणिलें	गुणिले

पृष्ठ	ओळ.	अशुद्ध.	शुद्ध.
११०	२९	प्रपाणे	प्रमाणें
१११	२५	७×२०+२०	७×(२०+२०)
	२७	५×२०+२०	५×(२०+२०)
१४७	७	व्युत्कम	व्युत्क्रम
	८	व्युत्कम	व्युत्क्रम
	१८	युत्कम	व्युत्क्रम
	२१	एनऐटअ	एनएटअ
१५१	१	अशांनीं	अंशांनीं
१६८	२	माहति	माहित.
१७९	१४	दर ३८ पेनोस	दर १८ पेनोस
१९३	३	५मनुष्यें	६ मनुष्यें
२२७	३	पैक्षा	पेक्षां
२४०	२२	$\frac{७७}{११२०}$	$\frac{७७९}{११२०}$
२४७	२९	ब	$ब^{न}$
२४८	२९	$ब^{न-१}$	$ब^{न-१}$
२७८	३१	कळा	विकळा
२७९	१५	चैं	चें
	२७	त्याच	त्याचें